Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής

30-5-2014

Θέμα Α

Α1. Σελ. 30 στο Σχολικό Βιβλίο

Α2. Σελ. 13 στο Σχολικό Βιβλίο

Α3. Σελ. 59 στο Σχολικό Βιβλίο

Α4. α. Σ

β. Λ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Σ

Θέμα Β

Β1. $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$

Β2. Είναι

$$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{12}{40} = 0{,}3,\ f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{8}{40} = 0{,}2,\ f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{14}{40} = 0{,}35 \text{ και } f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{6}{40} = 0{,}15,$$

οπότε προκύπτει ο παρακάτω τύπος

Κλάσεις	x_i	ν_i	f_i	$x_i \nu_i$
[2-4)	3	12	0,3	36
[4-6)	5	8	0,2	40
[6-8)	7	14	0,35	98
[8-10)	9	6	0,15	54
Σύνολο		40	1	228

Β3.

α. Αφού προσθέσουμε στον παραπάνω τύπο τη στήλη $x_i \nu_i$ έχουμε

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{228}{40} = 5{,}7 \text{χιλ.ευρώ}.$$

β. Αφού στις κλάσεις οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα το ζητούμενο πλήθος είναι $\frac{3v_2}{4}+v_3+v_4=6+14+6=26$ πωλητές.

Γ1. Η $f(x)=4x^3-\frac{7}{2}x^2+x-1$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$$f'(x)=12x^2-7x+1$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-7x+1=0$$

$$x=\frac{7\pm 1}{24}=\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ \text{ή} \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
		Τοπικό μέγιστο		Τοπικό ελάχιστο	

Άρα $x_1=P(K)=\frac{1}{4}$ και $x_2=P(A)=\frac{1}{3}$.

Είναι $N(K)+N(\Pi)+N(A)=N(\Omega)$ και, αφού επιλέγουμε στην τύχη, τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Οπότε διαιρώντας την παραπάνω σχέση με $N(\Omega)$ προκύπτει

$$P(K)+P(\Pi)+P(A)=1$$

Άρα $P(\Pi)=1-\frac{6}{24}-\frac{8}{24}=\frac{5}{12}$.

Γ2. Αφού τα Κ και Γ ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(\Gamma)=P(K\cup A)=P(K)+P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

Άρα $P(\Delta)=P[(K\cup A)']=1-P(K\cup A)=\frac{24}{24}-\frac{14}{24}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$ και

$$P(E)=P(A\cup\Pi')=P(A)+P(\Pi')-P(A\cap\Pi')=P(A)+1-P(\Pi)-P(A-\Pi)=$$

$$=P(A)+1-P(\Pi)-(P(A)-P(A\cap\Pi))=1-P(\Pi)=1-\frac{10}{24}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

Αφού $P(A \cap \Pi) = 0$.

Γ3. Είναι $N(A) = N(\Pi) - 4$ διαιρούμε με $N(\Omega)$ και παίρνουμε

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(\Pi)}{N(\Omega)} - \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = P(\Pi) - \frac{4}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{5}{12} - \frac{4}{N(\Omega)}$$

$$\Leftrightarrow N(\Omega) = 48 \text{ μπάλες}$$

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $\Pi\varepsilon\rho_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} = 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow y = 10 - x$, οπότε

$$E(x) = x \cdot (10 - x) + 2 \cdot 5 \cdot (10 - x) + 2 \cdot 5 \cdot x = -x^2 + 10x + 100, \text{ με } x \in (0,10)$$

Η Ε είναι παραγωγίσιμη ως πολυνυμική στο (0,10) με $E'(x) = -2x + 10$, οπότε

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Προκύπτει, επομένως, ο παρακάτω πίνακας μεταβολών.

x	0	5	10
E΄(x)	+	0	-
E(x)	↗		↘

Μέγιστο

Άρα το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια για x=5dm.

Δ2.

α. Αφού το δείγμα δεν είναι ομοιογενές θα ισχύει ότι $CV_x > 10\%$.

Επίσης $2s^2 - 5s + 2 = 0$

$$s = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} s = 2 \\ \text{ή} \\ s = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{και αφού}$$

$$CV_x = \frac{s}{\bar{x}} > 0,1 \Leftrightarrow \frac{s}{8} > 0,1 \Leftrightarrow s > 0,8$$

θα είναι δεκτή μόνο η s=2

β.

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right\} \Leftrightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \left(\bar{x}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} = s^2 + \left(\bar{x}\right)^2$$

Με αντικατάσταση $\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} = 8^2 + 2^2 = 68$.

Δ3. Ισχύει ότι $R = x_{max} - x_{min}$ και αφού η E(x) γνησίως φθίνουσα στο [5,10) θα έχουμε $R = E(x_1) - E(x_{15}) = E(5) - E(9) = 16$.

Επίσης

$$y_i > -4x_i + 9\cdot 16 + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 10x_i + 100 + 4x_i - 145 > 0 \Leftrightarrow -x_i + 14x_i - 45 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 4}{-2} = \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

και προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων

x	0		5		9		10
$-x_i + 14x_i - 45$		-	0	+	0	-	

Οπότε είναι $B = \{A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \ldots, A_{14}(x_{14}, y_{14})\}$ και αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα ισχύει ότι

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{13}{15}$$