Φυσική Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
10-6-2014

Θέμα Α

Α1. γ

Α2. β

Α3. γ

Α4. β

Α5. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

Θέμα Β

Β1.

α. iii

β.

$$d = A_1$$

$$mu_1 = 2mu_\sigma \Leftrightarrow \overset{u_{max}^{(\sigma)}}{u_\sigma} = \frac{\overset{u_{max}^{(1)}}{u_1}}{2} \Rightarrow \omega_\sigma A_2 = \frac{\omega_1 A_1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2k}{2m}} A_2 = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}} A_1}{2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = 2$$

Β2.

α. ii

β.

$$T_\delta = \frac{1}{f_1 - f_2} \Leftrightarrow f_1 - f_2 = \frac{1}{2} \ (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} N = \dfrac{T_\delta}{T} \Leftrightarrow T = \dfrac{T_\delta}{N} = \dfrac{2}{100} = \dfrac{1}{100} s \\ \left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{\bar{\omega}} \\ \bar{\omega} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \dfrac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2} = \pi(f_1 + f_2) \end{array}\right\} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\pi(f_1 + f_2)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{2}{f_1 + f_2} \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 200 \ (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2f_1 = 200,5 \Rightarrow f_1 = 100,25 Hz \text{ και } f_2 = 200 - 100,25 = 99,75 Hz$$

Β3.

α. iii

β. $m_1 : u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 < 0$, $m_2 : u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$ μετά τη σύγκρουση με τον τοί-χο και αφού $m_{τοιχου} >> m_2$ θα έχω $u_2'' = -u_2'$

για να μείνει η απόσταση σταθερή: $u_2'' = u_1'$

$$-\frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \Leftrightarrow m_2 = 3m_1 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

Θέμα Γ

Γ1. $r_2 = \upsilon \cdot t_2 = 0,5 \cdot 0,2 = 1\text{m}$

$r_1 = \upsilon \cdot t_1 = 5 \cdot 1,4 = 7\text{m}$

Γ2. $0 \le t \le 0,2\text{s}: \quad y_\phi = 0$

$0,2 < t \le 1,4: \quad y_\phi = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$, όπου

$$A = 5 \cdot 10^{-3}\text{m}$$

$$T = \frac{1,4-0,2}{3} = 0,4\text{s}$$

$$\lambda = \upsilon \cdot T = 2\text{m}$$

$$y_\phi = 5 \cdot 10^{-3}\eta\mu 2\pi\left(2,5t - \frac{1}{2}\right)(\text{SI})$$

$t > 1,4\text{s}$: ο φελλός βρίσκεται σε υπερβολή ενίσχυσης

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y = -2A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y = -10^{-2}\eta\mu 2\pi(2,5t-2)\,(\text{SI})$$

Γ3. Αφού $y_1 > 5 \cdot 10^{-3}\text{m}$ θα είναι την $t \ge 1,4\text{s}$:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_1 &= \pm\omega \cdot \sqrt{(2A)^2 - y_1^2} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi\,\text{rad/s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \upsilon_1 = \pm 5\pi\sqrt{100 \cdot 10^{-6} - 75 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \pm 5\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow |\upsilon_1| = 0,025\pi\,\text{m/s}$$

Γ4. Βρίσκουμε το νέο πλάτος του φελλού:

$$A_2 = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda'}$$

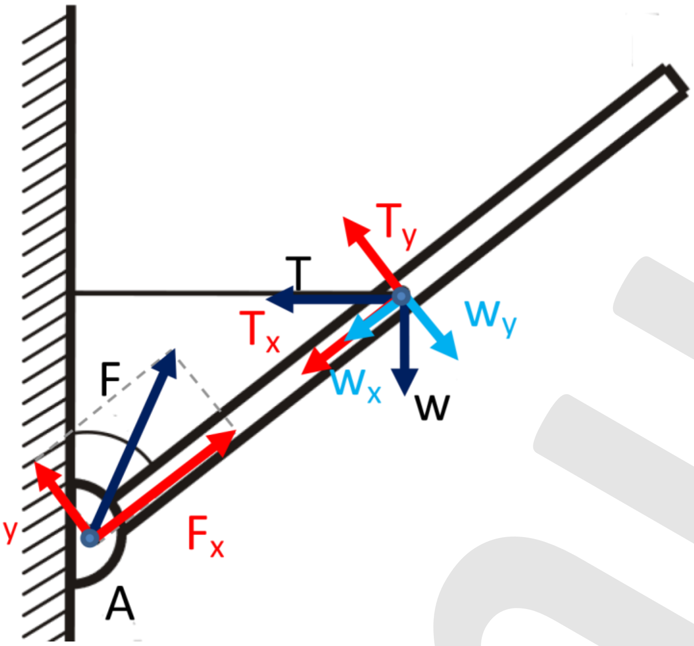
$$\left.\begin{aligned} u &= \lambda' f' \\ u &= \lambda f \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda' f' = \lambda f \Leftrightarrow \lambda'\frac{10}{9}f = \lambda f \Leftrightarrow \lambda' = \frac{9}{10}\lambda = 1,8\text{m}$$

$$|A_2| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{6}{3,6}\right| \Leftrightarrow |A_2| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{10\pi}{3}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}\right| = A = 5 \cdot 10^{-3}\text{m}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}mu_{max}^2}{\frac{1}{2}mu_{max}'^2} = \frac{\omega^2 A_1^2}{\omega'^2 A_2^2} = \frac{4\pi^2 f^2 A_1^2}{4\pi^2 f'^2 A_2^2} = \frac{f^2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{\frac{100}{81}f^2 \cdot 25 \cdot 10^{-6}} = \frac{4 \cdot 81}{100} = 3,24$$

Θέμα Δ

Δ1.



$\Sigma\vec{\tau}_A = 0 \Rightarrow \tau_{wy} = \tau_{Ty} \Rightarrow T_y \cdot \frac{l}{2} = w_y \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow T_y = w_y$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y - w_y + F_y = 0 \Rightarrow F_y = 0$

Και $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow w_x + T_x - F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x + w_x \Rightarrow F_x = 70N$

Τελικά $F = 70N$ με διεύθυνση τη διεύθυνση της ράβδου.

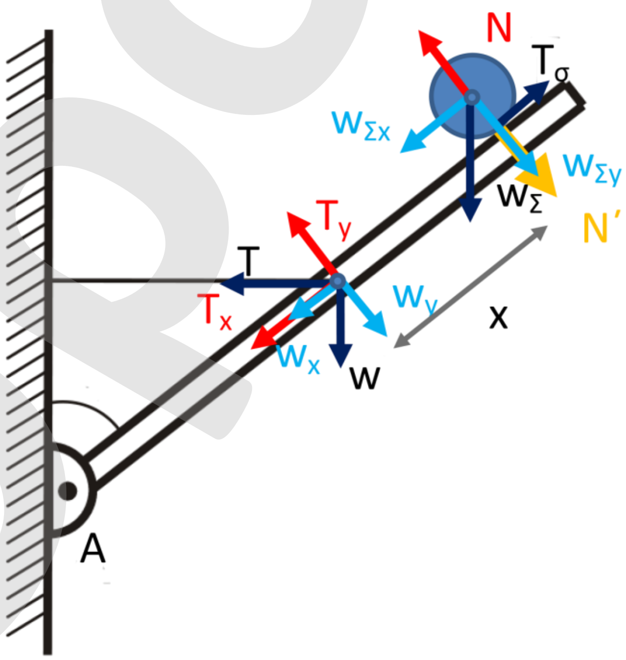
Δ2. Από τις σχέσεις $\Sigma\vec{\tau} = I_{σφ} \cdot \vec{α}_{γων}\ -T_{στ} \cdot r = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot a_{γων} \Rightarrow T_{στ} = -\frac{2}{5} \cdot m \cdot r \cdot a_{γων}$ (1)

Και $\Sigma\vec{F}_x = m \cdot \vec{α}_{cm} \Rightarrow T_{στ} - w_x = m \cdot a_{cm}$ (2)

Η (2) μέσω της (1) γίνεται :

$-\frac{2}{5} \cdot m \cdot r \cdot a_{γων} - m \cdot g \cdot συνφ = m \cdot a_{γων} \cdot r$ και προκύπτει ότι $a_{γων} = -400 rad/s^2$

Δ3.

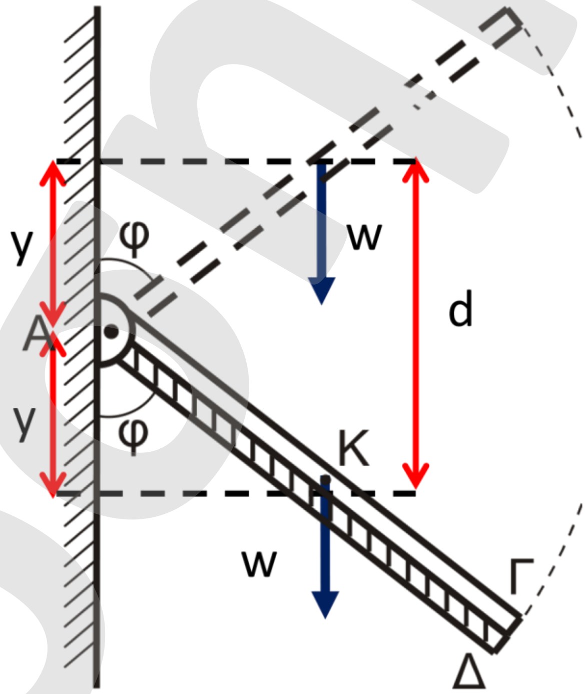


Από την ισορροπία της σφαίρας στον κατακόρυφο άξονα προκύπτει ότι $\sum F_y = 0 \Rightarrow N = w_{\Sigma y} = mg\eta\mu\phi$, ενώ είναι και N=N', άρα $N' = mg\eta\mu\phi$

Έστω x η απόσταση της σφαίρας από το σημείο Κ, καθώς κινείται από το Κ στο Γ. Επειδή η ράβδος ισορροπεί ισχύει

$$\sum \vec{\tau}_A = 0 \Rightarrow T'\sigma\upsilon\nu\phi\frac{\ell}{2} - Mg\eta\mu\phi\frac{\ell}{2} - N'\left(\frac{\ell}{2}+x\right)$$
$$\Rightarrow T'\sigma\upsilon\nu\phi\frac{\ell}{2} = Mg\eta\mu\phi\frac{\ell}{2} + mg\eta\mu\phi\left(\frac{\ell}{2}+x\right)$$
$$\Rightarrow T'\cdot 0{,}8\cdot\frac{2}{2} = 5{,}6\cdot 10\cdot 0{,}6\cdot\frac{2}{2} + 0{,}4\cdot 10\cdot 0{,}6\cdot\left(\frac{2}{2}+x\right)$$
$$\Rightarrow T' = 45 + 3x\,(SI),\ \text{όπου } 0 \le x \le 1$$

Δ4. Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ αρχικής και τελικής θέσης προκειμένου να υπολογίσουμε την τελική γωνιακή ταχύτητα της ράβδου. Ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής επιλέγω την τελική θέση του κέντρου μάζας της ράβδου. Έτσι το κέντρο μάζας της σφαίρας κατεβαίνει κατά $d = 2y = 2\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\phi$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Άρα

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow 0 + Mgd = \frac{1}{2}I_\rho\omega^2$$
$$\Rightarrow Mg2\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}M\ell^2\omega^2$$
$$\Rightarrow \omega^2 = 24\,(rad/s)^2$$
$$\Rightarrow \omega = 2\sqrt{6}\,rad/s$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισούται με την ισχύ λόγω περιστροφής άρα

$$\frac{dK}{dt} = P = \sum \tau_A \cdot \omega = \left(Mg\eta\mu\phi\frac{\ell}{2}\right)\cdot\omega = 67{,}2\sqrt{6}\,J/s\,.$$

Δ5. Επειδή η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών στο σύστημα των δύο ράβδων είναι μηδέν, εφαρμόζω την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής για να υπολογίσω την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος των δύο ράβδων μετά την κρούση.

$$\vec{L}_{αρχ}^{συστ} = \vec{L}_{τελ}^{συστ} \Rightarrow I_ρ ω = I_{συστ} ω' \Rightarrow \frac{1}{3} M \ell^2 ω = \left(\frac{1}{3} M \ell^2 + \frac{1}{3} 3M \ell^2 \right) ω' \Rightarrow ω' = \frac{ω}{4}.$$

Οπότε το ποσοστό απώλειας τη κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση ισούται με

$$\frac{|ΔK|}{K_{αρχ}} \cdot (100\%) = \frac{K_{αρχ} - K_{τελ}}{K_{αρχ}} (100\%) = \frac{\frac{1}{2} I_ρ ω^2 - \frac{1}{2} I_{συστ} ω'^2}{\frac{1}{2} I_ρ ω^2} (100\%) = 75\%$$