Μαθηματικά Ι ΕΠΑΛ

3-6-2014

Θέμα Α

Α1. Σελ. 138

Α2. **α.** Σ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ

Α3. **α.** $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

β. $\int_{\alpha}^{\beta}\text{συν}x\,dx=\text{ημ}\beta-\text{ημ}\alpha$

γ. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\ell|$

Θέμα Β

Β1. Είναι $xf(x)-2f(x)=x^2-4 \Leftrightarrow f(x)(x-2)=x^2-4$, οπότε για $x\neq 2 \Leftrightarrow x-2\neq 0$.

Άρα $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Β2. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$

Β3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε θα είναι

$$f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)=4$$

Θέμα Γ

Γ1.

Α/Α	Ηλικίες Υπαλλήλων	ν_i	x_i	$x_i\nu_i$	$f_i\%$
1η	[25, 35)	100	30	3000	50
2η	[35, 45)	50	40	2000	25
3η	[45, 55)	40	50	2000	20
4η	[55, 65)	10	60	600	5
Σύνολα		200		7600	100

Είναι $f_i\%=\dfrac{\nu_i}{\nu}\cdot 100=\dfrac{\nu_i}{200}\cdot 100=\dfrac{\nu_i}{2}$.

Άρα $f_1 = \dfrac{100}{2} = 50$, $f_2 = \dfrac{50}{2} = 25$, $f_3 = \dfrac{40}{2} = 20$ και $f_4 = \dfrac{10}{2} = 5$.

Γ2. Είναι $\overline{x} = \dfrac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4}{200} = \dfrac{7600}{200} = 38$ έτη.

Γ3. Είναι $f_3\% + f_4\% = 20 + 5 = 25$. Άρα το 25% των υπαλλήλων έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 έτη.

Γ4. Οι νέες συχνότητες θα είναι $v_1' = 110$, $v_2' = 45$, $v_3' = 40$ και $v_4' = 5$, οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Α/Α	Ηλικίες Υπαλλήλων	v_i'	x_i	$x_i v_i'$
$1^η$	[25, 35)	110	30	3300
$2^η$	[35, 45)	45	40	1800
$3^η$	[45, 55)	40	50	2000
$4^η$	[55, 65)	5	60	300
Σύνολα		200		7400

Άρα η νέα μέση τιμή $(\overline{y})$ θα είναι $\overline{y} = \dfrac{x_1 v_1' + x_2 v_2' + x_3 v_3' + x_4 v_4'}{200} = \dfrac{7400}{200} = 37$ έτη.

Θέμα Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων, οπότε

$$f'(x) = \left(e^x (x-1)\right)' = e^x (x-1) + e^x \cdot 1 = f(x) + e^x$$

Δ2. Έχουμε $f'(x) = e^x (x-1) + e^x = e^x (x - 1 + 1) = xe^x$, άρα

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow xe^x \geq 0 \overset{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x \geq 0$$

Προκύπτει, επομένως, ο παρακάτω πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ενώ έχει ελάχιστη τιμή στο $x = 0$ την $f(0) = e^0 (0-1) = -1$.

Δ3. Είναι $g(x) = f(x) + e^x = f'(x) = xe^x$, οπότε $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow xe^x \overset{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x \geq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Έτσι

$$
\begin{aligned}
E(\Omega) &= \int_{-1}^{1} |g(x)| dx = \int_{-1}^{0} [-g(x)] dx + \int_{0}^{1} g(x) dx = \int_{0}^{-1} g(x) dx + \int_{0}^{1} g(x) dx \\
&= \int_{0}^{-1} f'(x) dx + \int_{0}^{1} f'(x) dx = [f(x)]_0^{-1} + [f(x)]_0^{1} = f(-1) - f(0) + f(1) - f(0) \\
&= -2e^{-1} + 1 + 0 + 1 = 2 - 2\frac{1}{e} \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{ τ.μ.}
\end{aligned}
$$