

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\nu}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Αν $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}$ είναι η προβολή του $\vec{\nu}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$, να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nu} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\nu}$.

Μονάδες 7

A.2. Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

Μονάδες 4

A.3. Πως ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ με $\vec{\alpha} \parallel y'y$;

Μονάδες 4

A.4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

i. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

iii. Η εκκεντρότητα της έλλειψης (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\alpha > \beta > 0$ είναι πάντοτε ίση με $\frac{\beta}{\alpha}$.

iv. Αν $A(x_1, y_1)$ είναι σημείο του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$, όπου $0 < \rho \neq 1$ τότε η εφαπτομένη του C στο A έχει εξίσωση: $x x_1 + y y_1 = \rho^2$.

v. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής (C): $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία $A\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma\left(\kappa, \frac{\kappa-4}{2}\right)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

B.1. Να βρείτε τα διανύσματα \overline{AB} , $\overline{B\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

Μονάδες 9

B.2. Να αποδείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων \overline{AB} και \overline{BO} είναι αμβλεία, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 8

B.3. Αν $\overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma} = 2|\overline{B\Gamma}|^2$, να βρείτε τον αριθμό κ ($\kappa \in \mathbb{R}$).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(1-x) - \lambda y + \frac{1+x}{4} = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ.1. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθείες, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ.2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο από το οποίο να διέρχονται όλες οι ευθείες της μορφής (1).

Μονάδες 8

Γ.3. Αν (ε_1) , (ε_2) είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για $\lambda = 1$ και $\lambda = -1$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζουν οι (ε_1) , (ε_2) με τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 6

Γ.4. Να βρείτε το σημείο της (ε_1) , το οποίο απέχει από την αρχή των αξόνων τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + 2y^2 + (2\lambda - 4)x + (2\lambda + 4)y + \lambda^2 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ.1. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει ίσους κύκλους.

Μονάδες 4

Δ.2. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων είναι σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση: $x - y - 2 = 0$.

Μονάδες 4

Δ.3. Να αποδείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι της μορφής (1) εφάπτονται δύο ευθειών $(\delta_1), (\delta_2)$ των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

Μονάδες 9

Δ.4. Έστω η παραβολή (C): $x^2 = 2py$ και η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ.2. Αν η (ε) είναι εφαπτομένη της παραβολής, να βρείτε:

i. την παράμετρο p , την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

Μονάδες 4

ii. την εφαπτομένη (η) της παραβολής, η οποία είναι κάθετη στην (ε).

Μονάδες 4

Σας ευχόμαστε επιτυχία