

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 7 Απριλίου 2013
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Να αποδείξετε ότι αν $a > 0$ με $a \neq 1$ τότε για κάθε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

Μονάδες 9

A.2. α) Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται άρτια;

Μονάδες 3

β) Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται περιοδική;

Μονάδες 3

A.3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Μονάδες 2

β) Αν $a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$ τότε $a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$

Μονάδες 2

γ) Η συνάρτηση $f(x) = e^{\sin x}$ έχει πεδίο ορισμού της το σύνολο $\mathbb{R}_1 = \{x \mid \eta \mu x \neq 0\}$

Μονάδες 2

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \varphi(x+c)$ όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

Μονάδες 2

ε) Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + (\alpha + \beta)x^2 + (2\alpha + 5\beta)x + 3$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

B.1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το $x+1$ να είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ να ισούται με -9

Μονάδες 8

B.2. Για $\alpha = -7$ και $\beta = 2$:

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

Μονάδες 5

β) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Μονάδες 6

γ) Αν $v(x)$ το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης να λύσετε την ανίσωση $\frac{v(x)}{P(x)} \geq 0$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} \eta\mu(\pi + \theta)x + \sigma\upsilon\nu(-\theta)y = 1 \\ \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)x - \eta\mu(\theta - \pi)y = 1 \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Γ.1. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta, \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta), \theta \in \mathbb{R}.$

Μονάδες 12

Γ.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (10^a - 3)\sigma\upsilon\nu x - 4, a \in \mathbb{R}.$

α) Να βρείτε την τιμή του a για την οποία η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή το 3

Μονάδες 6

β) Για $a = 1$, να βρείτε τις τιμές του $\theta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $xy = f(\theta)$ όπου (x, y) είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{[\ln(e^x - e^2)]^2 - 3}{\ln(e^x - e^2) - 2}$

Δ.1. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\ln(2e^2)$, $\ln(e^3 + e^2)$, 2 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 7

Δ.2. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{y^2 - 3}{y - 2} \geq 6$

Μονάδες 5

Δ.3. Έστω $x_0 = \ln(e^3 + e^2)$:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x_0) = 6$

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in (\ln(2e^2), +\infty)$. (μονάδες 5)

Είναι το $f(x_0)$ ελάχιστο της συνάρτησης; (μονάδες 3)

Μονάδες 8