

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΟΡΟΣΗΜΟ

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
27-5-2013

Θέμα Α.

A1. Σχολικό Βιβλίο 335

A2. Σχολικό Βιβλίο 246

A3. Σχολικό Βιβλίο 222

- A4. α) $\wedge$
β) Σ
γ) Σ
δ) $\wedge$
ε) Σ

Θέμα Β.

B1. Για τους μιγαδικούς z ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow$$

$$(z-2)(\overline{z-2})+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$$

Θέτω $|z-2|=w \geq 0$

Άρα έχουμε $w^2+w-2=0$

$$\Delta=1+8=9$$

$$w_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \text{ απορ.} \end{cases}$$

Άρα $|z-2|=1$ οπότε ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με $K(2,0)$ και $\rho=1$.

$$|z|=|z-2+2| \leq |z-2|+|2|=1+2=3 \text{ άρα } |z| \leq 3$$

B2. Δίνεται η εξίσωση $w^2+\beta w+\gamma=0$, $w \in \mathbb{C}$ με ρίζες z_1, z_2 .

Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ τότε $z_1=1+0i$ και $z_2=3+0i$ τότε $|\operatorname{Im}(z_1)-\operatorname{Im}(z_2)|=0 \neq 2$ Άτοπο.

Οπότε z_1, z_2 συζυγείς άρα $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_1-y_1i$

$$\text{Επομένως } |\operatorname{Im}(z_1)-\operatorname{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |y_1-(-y_1)|=2 \Leftrightarrow |2y_1|=2 \Leftrightarrow y_1=\pm 1$$

Από B1 η εξίσωση είναι C: $(x-2)^2+y^2=1$ άρα $(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$

Οπότε $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$

Τύποι Vieta:

$$z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow -\beta = 4 \Leftrightarrow \beta = -4$$

$$z_1 \cdot z_2 = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 5$$

B3.

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$$

$$\text{Άρα } |v^3| = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|$$

Εφαρμόζοντας τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$|v^3| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = |\alpha_2| |v|^2 + |\alpha_1| |v| + |\alpha_0|$$

Έχουμε: $|\alpha_0| \leq 3$, $|\alpha_1| \leq 3$, $|\alpha_2| \leq 3$, άρα

$$\begin{aligned} |v|^3 &= |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 12 + 9 \leq 0 \Leftrightarrow |v|^2(|v| - 3) - 3(|v| - 3) \leq 12 \\ &\Leftrightarrow (|v| - 3)(|v|^2 - 3) \leq 12 \end{aligned}$$

Έστω ότι $|v| \geq 4$, τότε $|v| \geq 4 \Leftrightarrow |v| - 3 \geq 1$.

$$|v| \geq 4 \Leftrightarrow |v|^2 \geq 16 \Leftrightarrow |v|^2 - 3 \geq 13.$$

$$\text{Όμως } \left. \begin{array}{l} (|v| - 3) \geq 1 \\ (|v|^2 - 3) \geq 13 \end{array} \right\} \Rightarrow (|v| - 3)(|v|^2 - 3) \geq 13, \text{ άτοπο διότι } (|v| - 3)(|v|^2 - 3) \leq 12$$

Άρα $|v| < 4$.

Θέμα Γ.

Γ1.

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

f : παραγωγίσιμη

$$(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$$

$$\Leftrightarrow 2(f(x) + x)(f(x) + x)' = 2x$$

$$\Leftrightarrow ((f(x) + x)^2)' = (x^2)' \text{ Άρα υπάρχει } c \in \mathbb{R} \text{ ώστε για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$(f(x) + x)^2 = x^2 + c$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$(f(0)^2) = 0 + c \Leftrightarrow 1 = c$$

$$\text{άρα } (f(x) + x)^2 = x^2 + 1$$

Θεωρώ

$$h(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow h^2(x) = x^2 + 1, \text{ άρα } h^2(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow h(x) \neq 0$$

και συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.
Επομένως:

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad f(x) + x = -\sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R} \quad \text{ή} \quad f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Όμως } f(0) = 1 \text{ άρα } f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$$

Γ2.

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} 2x - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} < 0$$

$$\text{διότι } \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ και } x + \sqrt{x^2 + 1} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$$

$$\text{άρα } f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } \mathbb{R} \Rightarrow f(1) - 1$$

$$f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0$$

g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής ως πολυωνυμική συνάρτηση 3^{ου} βαθμού

$$g'(x) = 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 6x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	⊖	⊖	+
$g(x)$				

Τοπ. μέγ.

Τοπ. ελάχ.

$$g(-1) = -1 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2} - 2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$g(0) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$\text{Έστω } \Delta_1 = (-\infty, -1] \text{ } g \text{ συνεχής και γνησίως αύξουσα στο } \Delta_1 \text{ άρα } g(\Delta_1) = (-\infty, -\frac{1}{2}]$$

$$\Delta_2 = (-1, 0] \text{ } g \text{ συνεχής και γνησίως αύξουσα στο } \Delta_2 \text{ άρα } g(\Delta_2) = [-1, -\frac{1}{2}]$$

$$\Delta_3 = (0, +\infty) \text{ } g \text{ συνεχής και γνησίως αύξουσα στο } \Delta_3 \text{ άρα } g(\Delta_3) = [-1, +\infty)$$

$$0 \notin g(\Delta_1) \text{ και } 0 \notin g(\Delta_2)$$

Επειδή $0 \in g(\Delta_3)$ και g γνησίως αύξουσα στο Δ_3 τότε η $g(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.

$$\text{Γ3. Για } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt = f\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon \phi x \Leftrightarrow \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt = f\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x}$$

$$\Leftrightarrow \sigma \upsilon \nu x \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - \eta \mu x \cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Θεωρούμε $\phi(x) = \eta \mu x \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

- f συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{4}]$ ως παραγωγίσιμη
- άρα $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη
- η $w(x) = x - \frac{\pi}{4}$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική
- άρα η $h(w(x)) = \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt = - \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- η $\phi(x) = \eta \mu x \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= (\eta \mu x)' \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt + \eta \mu x \left(\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt \right)' = \\ &= \sigma \upsilon \nu x \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt + \eta \mu x \left(- \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt \right)' = \\ &= \sigma \upsilon \nu x \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - \eta \mu x \cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(x-\frac{\pi}{4}\right)' \end{aligned}$$

Άρα $\phi'(x) = \sigma \upsilon \nu x \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt - \eta \mu x \cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

- $\phi(0) = \eta \mu 0 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt = 0 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)dt = 0$
- $\phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \eta \mu \frac{\pi}{4} \int_0^0 f(t)dt = \eta \mu \frac{\pi}{4} \cdot 0 = 0$

Άρα από το θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\phi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \sin x_0 \int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = \eta \mu x_0 \cdot f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = \epsilon \phi x_0 \cdot f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Θέμα Δ.

f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$$

$$g(x) = \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt, x > 1, a > 1$$

Δ1.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right] = 0 \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε γενικά ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{h} = \alpha f'(x_0), \alpha \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Θέτουμε } x_0 + \alpha h = x \Leftrightarrow h = \frac{x - x_0}{\alpha}, \alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\frac{x - x_0}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \alpha f'(x_0)$$

Η (1) γίνεται:

$$(1): 5f'(1) + f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$$

Θα δείξουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο $x_0=1$.

Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, η $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

$$\text{για } x > 1 \Leftrightarrow \overset{f' \text{ γν. αύξ.}}{f'(x)} > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$$\text{για } x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$$

	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$\ominus$	$+$
$f(x)$			

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$. Άρα $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, άρα και συνεχής, οπότε η συνάρτηση

$$p(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} \text{ συνεχής οπότε η } g \text{ παραγωγίσιμη (οπότε και συνεχής) στο } (1, +\infty) \text{ με}$$

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} > 0, \text{αφού}$$

- $x > 1 \Leftrightarrow x-1 > 0$
- $f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x)-1 > 0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα

$$\text{Θα δείξουμε ότι } \int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du$$

$$\text{Έστω } H(x) = \int_{x+5}^{x+6} g(u)du = \int_{x+5}^{\alpha} g(u)du + \int_{\alpha}^{x+6} g(u)du = - \int_{\alpha}^{x+5} g(u)du + \int_{\alpha}^{x+6} g(u)du, \quad x \in (-4, +\infty)$$

Η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $H'(x) = -g(x+5) + g(x+6)$

Αφού

$x+6 > x+5$ και g γνησίως αύξουσα

$$g(x+6) > g(x+5)$$

$$g(x+6) - g(x+5) > 0$$

$H'(x) > 0$ δηλαδή $H(x)$ γνησίως αύξουσα

$$H(8x^2) > H(2x^4) \Leftrightarrow 8x^2 > 2x^4 \Leftrightarrow 8x^2 - 2x^4 > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - x^4 > 0 \Leftrightarrow x^2(4-x^2) > 0$$

$$\begin{cases} 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

Και κάνοντας πίνακα προσήμων

x	-4	-2	0	2	$+\infty$
$4-x^2$		- ○ +		+ ○ -	
x^2		+ ○ +		+ ○ +	
$x^2(4-x^2)$		- ○ +		+ ○ -	

$$\text{Άρα } x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$$

Δ3 Θα δείξουμε ότι η g είναι κυρτή

Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}, \quad x > 1$$

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2}$$

Άρα θα δείξουμε

$f'(x)(x-1) - (f(x)-1) > 0$, με $x > 1$ δηλαδή ότι

$$f'(x) - \frac{f(x)-1}{x-1} > 0$$

Η f συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη $(1, x)$ από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1, x)$

$$\left. \begin{aligned} f'(\xi) &= \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - 1}{x - 1} \\ &\quad \text{f' γν. αυξ.} \\ 1 < \xi < x &\Leftrightarrow f'(\xi) < f'(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} < f'(x)$$

$$f'(x) - \frac{f(x) - 1}{x - 1} > 0$$

Άρα $g'(x) > 0$ άρα g είναι κυρτή.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$(\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha) \text{ και αφού } \alpha > 1$$

$$\frac{(\alpha - 1)g(x)}{\alpha - 1} = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}(x - \alpha)$$

$$g(x) = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}(x - \alpha),$$

Όμως g κυρτή και η $y = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}(x - \alpha)$ είναι η εφαπτομένη της C_g στο $(\alpha, g(\alpha))$,

οπότε θα έχουν μόνο ένα σημείο επαφής στο $x = \alpha$ το οποίο και είναι η μοναδική λύση.