

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΟΡΟΣΗΜΟ

Μαθηματικά Ι (ΕΠΑΛ Α ΟΜΑΔΑ)

23-5-2013

Θέμα Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 234

- A2. α) Σ
β) Σ
γ) Λ
δ) Λ
ε) Σ

A3.

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x dx = \sigma \upsilon \nu \alpha - \sigma \upsilon \nu \beta$

Αναλυτικά: $\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x dx = [-\sigma \upsilon \nu x]_{\alpha}^{\beta} = (-\sigma \upsilon \nu \beta) - (-\sigma \upsilon \nu \alpha) = \sigma \upsilon \nu \alpha - \sigma \upsilon \nu \beta$

β) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

γ) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

Θέμα Β

Δίνεται

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2}, & x > 1 \end{cases}$$

B1.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha^2 x + \ln x) = \alpha^2 \cdot 1 + \ln 1 = \alpha^2$$

B2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = 1 \cdot (\sqrt{1+3}+2) = 4 \end{aligned}$$

B3.

$$f \text{ συνεχής στο } x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ή } \alpha = -2$$

Θέμα Γ

Γ1.

$$\text{Έχουμε } v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 25 + 17 + 6 + 2 = 50$$

Επίσης

$$f_1 \% = \frac{100v_1}{v} = \frac{100 \cdot 25}{50} = 50$$

$$f_2 \% = \frac{100v_2}{v} = \frac{100 \cdot 17}{50} = 34$$

$$f_3 \% = \frac{100v_3}{v} = \frac{100 \cdot 6}{50} = 12$$

$$f_4 \% = \frac{100v_4}{v} = \frac{100 \cdot 2}{50} = 4$$

Άρα

x_i	v_i	$f_i \%$	$x_i v_i$
6	25	50	150
10	17	34	170
15	6	12	90
20	2	4	40
Σύνολα	50	100	450

Γ2.

$$\text{Είναι } \bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i = \frac{1}{50} \cdot 450$$

$$\text{Άρα } \bar{x} = 9$$

Δηλαδή η μέση τιμή των μισθών είναι 900€.

Γ3. Από τον πίνακα προκύπτει ότι το ποσοστό των υπαλλήλων με μισθό το πολύ 1000€ (δηλαδή το πολύ 10) είναι $f_1\% + f_2\% = 50 + 34 = 84$

Άρα 84%

Γ4.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (\bar{x} - x_i)^2 v_i}{v}$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(6-9)^2 25 + (10-9)^2 17 + (15-9)^2 6 + (20-9)^2 2}{50} = \\ &= \frac{225 + 17 + 216 + 242}{50} = \frac{700}{50} = 14 \end{aligned}$$

Άρα $s^2 = 14 \cdot 100 = 1400$

Θέμα Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x-2)^2]' \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot (x+\alpha)' = \\ &= 2(x-2) \cdot (x-2)' \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot 1 \\ &= 2(x-2) \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 = 2(x-2) \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 = \\ &= (x-2) \cdot [2(x+\alpha) + (x-2)] = (x-2) \cdot (3x+2\alpha-2), x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Δ2. Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$ και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, από Θ. Fermat θα έχουμε:

$$f'(4) = 0 \Rightarrow (4-2)(3 \cdot 4 + 2\alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (2\alpha + 10) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + 10 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5$$

Δ3. Για $\alpha = -5$ στη $f'(x)$ έχουμε:

$$f(x) = (x-2)^2(x-5) \text{ και}$$

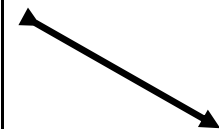
$$f'(x) = (x-2)(3x-12) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3x-12) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 4$$

Κάνουμε πίνακα προσήμων της $f'(x)$

x	$-\infty$	2	4	$-\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
$f(x)$				

Τ.μ.

Τ.ε.

Μονοτονία:

Στα διαστήματα $(-\infty, 2]$, $[4, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Στο διάστημα $[2, 4]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Ακρότατα:

Για $x = 2$ έχουμε τοπικό μέγιστο με τιμή $f(2) = 0$.

Για $x = 4$ έχουμε τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(4) = -4$.

Δ4. Το εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |g(x) - h(x)| dx = \int_{\alpha}^{\beta} |3x^2 - 18x + 24| dx = \int_{\alpha}^{\beta} |f'(x)| dx$$

Από τον πίνακα προσήμων της $f'(x)$ του Δ3 βρίσκουμε το πρόσημο της $f'(x)$ και τα άκρα ολοκλήρωσης $\alpha=2$ και $\beta=4$.

Άρα,

$$\begin{aligned} E &= \int_2^4 (-f(x)) dx = -\int_2^4 f'(x) dx = -[f(x)]_2^4 \\ &= -(f(4) - f(2)) = -(-4 - 0) = 4 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$