

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΟΡΟΣΗΜΟ

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής

20-5-2013

Θέμα Α

A1. Σχολικό Βιβλίο σελ 28

A2. Σχολικό Βιβλίο σελ 14

A3. Σχολικό Βιβλίο σελ 87

A4. α) $\wedge$

β) Σ

γ) $\wedge$

δ) $\wedge$

ε) $\wedge$

Θέμα Β

B1.

$$\begin{aligned} P(w_1) &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x^3 + x^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2(\sqrt{x^2 + x + 1} + 1)} = \\ &= -\frac{1-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } P(w_1) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Είναι } P(w_3) = f'(1), \text{ όμως } f'(x) = \frac{1}{3} \ln x + \frac{x}{3x}, \text{ με } x > 0. \text{ Οπότε } f'(1) = \frac{1}{3} \ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Άρα } P(w_3) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{B2. Είναι } A' = \{w_2, w_3\}, \text{ οπότε } \{w_3\} \subseteq A' \Rightarrow P(w_3) \leq P(A') \Rightarrow \frac{1}{3} \leq P(A')$$

$$\text{Επίσης } P(A') \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 1 - P(A) \leq \frac{3}{4} \Rightarrow P(A) \geq \frac{1}{4}$$

$$\text{Που ισχύει αφού } \{w_1\} \subseteq A \Rightarrow P(w_1) \leq P(A) \Rightarrow \frac{1}{4} \leq P(A)$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$$

B3. Είναι $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$. Οπότε

$$P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

Από τον Αξιωματικό Ορισμό των Πιθανοτήτων έχουμε

$$P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$$

$$P(\omega_4) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{12 - 3 - 5 - 4}{12} \Leftrightarrow$$

$$P(\omega_4) = 0$$

Είναι $A - B = \{\omega_4\}$ και $B - A = \{\omega_3\}$, άρα $(A - B) \cup (B - A) = \{\omega_3, \omega_4\}$.

$$\text{Επομένως } P((A - B) \cup (B - A)) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

Θέμα Γ

Γ1. Οι κλάσεις είναι

$$[50, 50+c), [50+c, 50+2c), [50+2c, 50+3c), [50+3c, 50+4c)$$

Οπότε, αφού, $x_4 = 85$ θα έχουμε:

$$x_4 = 85 \Leftrightarrow \frac{50 + 3c + 50 + 4c}{2} = 85 \Leftrightarrow 100 + 7c = 170 \Leftrightarrow 7c = 70 \Leftrightarrow c = 10$$

Γ2.

Κλάσεις	x_i	f_i	v_i
$[50, 60)$	55	0,1	v_1
$[60, 70)$	65	0,3	v_2
$[70, 80)$	75	0,2	v_3
$[80, 90)$	85	0,4	v_4
ΣΥΝΟΛΟ		1	v

$$\text{Επομένως } \bar{x} = 74 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 x_i f_i = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74 \quad (1)$$

$$\text{και } f_4 = 2f_3 \quad (2)$$

$$\text{και } \sum_{i=1}^4 f_i = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \xrightarrow{\cdot(-4)} -4f_1 - 4f_2 - 4f_3 - 4f_4 = -4 \quad (3)$$

$$\text{και } \delta = 75 \xrightarrow{\delta=x_4} f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4f_1 + 4f_2 + 2f_3 = 2 \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} -2f_3 - 4f_4 &= -2 \Rightarrow f_3 + 2f_4 = 1 \\ f_4 &= 2f_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_3 + 4f_3 = 1 \Rightarrow 5f_3 = 1 \Rightarrow f_3 = 0,2, f_4 = 0,4$$

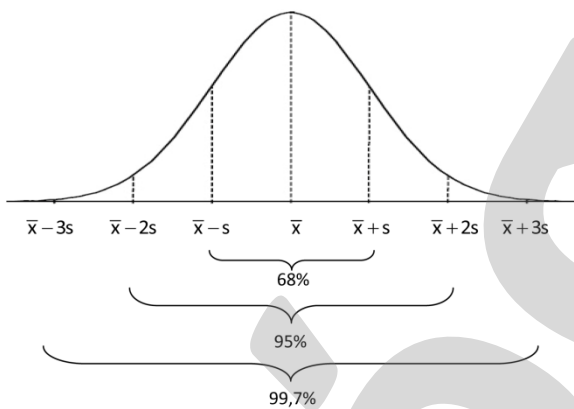
$$\text{Επίσης } f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Rightarrow f_1 + f_2 + 0,6 = 1 \Rightarrow f_1 + f_2 = 0,4$$

$$\begin{aligned} 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 &= 74 \Rightarrow 55f_1 + 65f_2 + 15 + 34 = 74 \Rightarrow \\ 55f_1 + 65f_2 &= 25 \\ f_1 + f_2 &= 0,4 \end{aligned} \Rightarrow f_2 = 0,3, f_1 = 0,1$$

Γ3.

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{x_1f_1v + x_2f_2v + x_3f_3v}{f_1v + f_2v + f_3v} = \\ &= \frac{55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2}{0,6} = \frac{40}{0,6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3} \end{aligned}$$

Γ4. Είναι



$$\left. \begin{aligned} \bar{x} + 25 &= 74 \\ \bar{x} - s &= 68 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{x} = 70, s = 2$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10} \text{ άρα ομοιογενής}$$

Δ1. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ είναι $\epsilon: y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = f'(1)$. Είναι:

$$f'(x) = \ln x + 1, x > 0 \text{ άρα } f'(1) = 1 \text{ οπότε } \epsilon: y = x + \beta.$$

$$f(1) = \kappa \text{ (} 1, f(1) \text{)} \in (\epsilon) \text{ άρα } \kappa = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = \kappa - 1.$$

$$\text{Συνεπώς } \epsilon: y = x + \kappa - 1.$$

Η ϵ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(1-\kappa, 0)$ και $B(0, \kappa-1)$, άρα

$$E = (OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}|\kappa - 1||1 - \kappa| = \frac{1}{2}|\kappa - 1|^2$$

$$E < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|\kappa - 1|^2 < 2 \Leftrightarrow |\kappa - 1|^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$$

και αφού $\kappa \in \mathbb{Z}$ και $\kappa > 1$ τότε $\kappa = 2$

Δ2. α) Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου $\bar{y} = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow \bar{x} = 30$.

β) έστω η νέα μέση τιμή $\bar{z} = 31$ τότε

$$\bar{z} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{50} + 20 \cdot 3 - 15\lambda}{50} \Leftrightarrow 31 = \frac{1500 + 60 - 15\lambda}{50} \Leftrightarrow$$

$$1550 = 1500 + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow 15\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3.

$f(x) = x \ln x + 2$ άρα $f'(x) = \ln x + 1$ $f'(x) > 0$ για $x > \frac{1}{e}$ άρα $f(x)$ γνησίως άυξουσα.

$$f(\alpha) = \alpha \ln \alpha + 2, f(\beta) = \beta \ln \beta + 2, f(\gamma) = \gamma \ln \gamma + 2, f(e) = e + 2, f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$$

$$f(1/e) = -\frac{1}{e} + 2 > 0, \alpha > \frac{1}{e} \Rightarrow f(\alpha) > 0$$

$$\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e \Rightarrow 0 < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < e + 2$$

$$\bar{x} = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'(1/e)}{5} = \frac{\ln \alpha^\alpha + \ln \beta^\beta + \ln \gamma^\gamma + e + 8}{5} = \frac{15 + e}{5}$$

$$\text{γιατί } \ln \alpha^\alpha + \ln \beta^\beta + \ln \gamma^\gamma = \ln(\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma) = 7$$

$$R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2$$

Δ4. α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(t, f(t))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία, άρα

$$f'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow t > e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\text{Οπότε } A = \{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{30}\}$$

$$\text{Άρα } N(A) = 20 \text{ κι αφού έχουμε ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα } P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

β)

$$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t \ln t + 2 > \ln t + 1 + 1 \Leftrightarrow$$

$$t \ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t(t-1) > 0 \Leftrightarrow \overset{0 < t \leq 1}{0 < t < 1}$$

Οπότε $B = \{t_1, t_2, \dots, t_{29}\}$ και $A \cap B = \{t_{11}, \dots, t_{29}\}$ άρα $N(A \cap B) = 19$ κι αφού έχουμε ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα $P(A \cap B) = \frac{19}{30}$.