

	<b>ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ (Ο.Ε.Φ.Ε.) – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</b>
<b>ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012</b>	<b>E_3.Μλ1A(α)</b>

**ΤΑΞΗ:** Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΜΑΘΗΜΑ:** ΑΛΓΕΒΡΑ

**Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012**

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### **ΘΕΜΑ Α**

**A.1.** Σχολικό Βιβλίο σελίδα 34.

**A.2.** Σχολικό Βιβλίο σελίδα 125.

- A.3.**
- α. ΣΩΣΤΟ
  - β. ΛΑΘΟΣ
  - γ. ΛΑΘΟΣ
  - δ. ΣΩΣΤΟ
  - ε. ΣΩΣΤΟ

#### **ΘΕΜΑ Β**

**B.1.** Για να ορίζεται η συνάρτηση  $f$  πρέπει

- $(x+1)^4 \geq 0$ , το οποίο ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
και
- $(x-2)^4 \geq 0$  το οποίο ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .  
και
- $x+1 \neq 0$  και  $x-2 \neq 0$ , δηλαδή  $x \neq -1$  και  $x \neq 2$

Άρα το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $A = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

**B.2.** για κάθε  $x \in A = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$  ο τύπος της  $f$  γίνεται

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x+1)^4}}{x+1} - \frac{\sqrt{(x-2)^4}}{x-2} = \frac{\sqrt{[(x+1)^2]^2}}{x+1} - \frac{\sqrt{[(x-2)^2]^2}}{x-2} =$$

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

E\_3.Mλ1A(a)

$$= \frac{|(x+1)^2|}{x+1} - \frac{|(x-2)^2|}{x-2} = \frac{|(x+1)^2|}{x+1} - \frac{|(x-2)^2|}{x-2} = x+1 - (x-2) = x+1 - x+2 = 3$$

Άρα για κάθε  $x \in A = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$  ισχύει ότι:  $f(x) = 3$ .

Έτσι  $f(2012) = 3$ .

**B.3.** Έτσι η ανίσωση  $|18-3x| \leq f(2012)$  γίνεται:

$$|18-3x| \leq f(2012) \Leftrightarrow |3(6-x)| \leq 3 \Leftrightarrow |3||6-x| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |6-x| \leq 1 \Leftrightarrow |x-6| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-6 \leq 1 \Leftrightarrow -1+6 \leq x \leq 1+6$$

Οπότε  $x \in [5, 7]$ .

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ.1.1.** Η εξίσωση γίνεται:

$$x + 1 = \lambda^2 - |\lambda| \cdot x \Leftrightarrow |\lambda| \cdot x + x = \lambda^2 - 1$$

$$\text{ή } (|\lambda| + 1) \cdot x = |\lambda|^2 - 1$$

ο συντελεστής των αγνώστου  $x$  είναι ο  $\alpha = |\lambda| + 1$  και ο σταθερός όρος της εξίσωσης ο  $\beta = |\lambda|^2 - 1 = (|\lambda| - 1)(|\lambda| + 1)$ .

Όμως για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $|\lambda| \geq 0 \Leftrightarrow |\lambda| + 1 \geq 1 > 0$ .

Άρα για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  ο  $\alpha = |\lambda| + 1 \neq 0$ , έτσι η εξίσωση έχει για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , μοναδική λύση ως προς  $x$ , την

$$(|\lambda|+1) \cdot x = |\lambda|^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{(|\lambda|+1) \cdot x}{(|\lambda|+1)} = \frac{(|\lambda|-1)(|\lambda|+1)}{(|\lambda|+1)} \Leftrightarrow x = |\lambda| - 1$$

άρα η λύση της εξίσωσης  $x = |\lambda| - 1$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Γ.1.2.** Για να απέχει η λύση αυτή από τον αριθμό 3, απόσταση που δεν ξεπερνά το 2, άρα:

$$d(x, 3) \leq 2 \Leftrightarrow |x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow ||\lambda| - 1 - 3| \leq 2 \Leftrightarrow ||\lambda| - 4| \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq |\lambda| - 4 \leq 2 \Leftrightarrow -2 + 4 \leq |\lambda| \leq 4 + 2 \Leftrightarrow 2 \leq |\lambda| \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\lambda| \leq 6 \\ |\lambda| \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq \lambda \leq 6 \\ \text{και} \\ \text{ή } \lambda \leq -2 \text{ ή } \lambda \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in [-6, -2] \cup [2, 6]$$

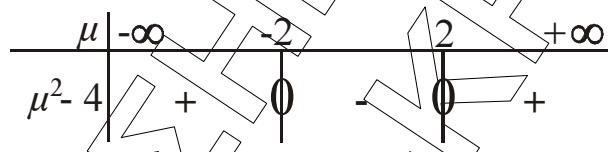
Γ2. έχουμε τις ευθείες

$$\varepsilon_1 : y = (\mu^2 - 4)x + \mu + 1, \quad \mu \in \mathbb{R} \text{ και}$$

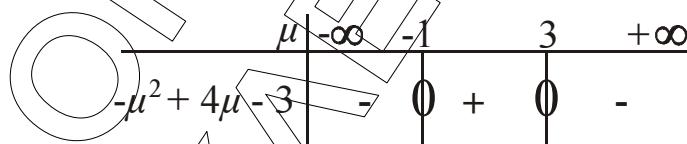
$$\varepsilon_2 : y = (-\mu^2 + 4\mu - 3)x + 2, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της  $\varepsilon_1$  είναι ο  $\alpha_1 = \varepsilon \varphi \omega_1 = \mu^2 - 4$ , όπου  $\omega_1$  είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία  $\varepsilon_1$  με τον άξονα  $x'$  $x$ , ενώ ο συντελεστής διεύθυνσης της  $\varepsilon_2$  είναι  $\alpha_2 = \varepsilon \varphi \omega_2 = -\mu^2 + 4\mu - 3$  όπου  $\omega_2$  είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία  $\varepsilon_2$  με τον άξονα  $x'$  $x$ .

Για να σχηματίζει η ευθεία  $\varepsilon_1$  αμβλεία γωνία με τον άξονα  $x'$  $x$  δηλαδή:  $90^\circ < \omega_1 < 180^\circ$  πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της  $\varepsilon_1$ , να είναι αρνητικός δηλαδή  $\alpha_1 = \varepsilon \varphi \omega_1 < 0$ , άρα  $\alpha_1 < 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow \mu \in (-2, 2)$



Για να σχηματίζει η ευθεία  $\varepsilon_2$  οξεία γωνία με τον άξονα  $x'$  $x$  δηλαδή:  $0^\circ < \omega_2 < 90^\circ$ , πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της  $\varepsilon_2$  να είναι θετικός δηλαδή  $\alpha_2 = \varepsilon \varphi \omega_2 > 0$ , άρα  $\alpha_2 > 0 \Leftrightarrow -\mu^2 + 4\mu - 3 > 0 \Leftrightarrow \mu \in (1, 3)$



Έτσι για να σχηματίζουν η  $\varepsilon_1$  αμβλεία γωνία με τον  $x'$  $x$  και η  $\varepsilon_2$  οξεία γωνία με τον άξονα  $x'$  $x$  θα πρέπει να βρούμε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 < 0 \\ \text{και} \\ \alpha_2 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \mu \in (-2, 2) \\ \text{και} \\ \mu \in (1, 3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mu \in (1, 2)$$

## ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

E\_3.Μλ1A(a)

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ.1.** Αφού η ακολουθία  $(\alpha_v), v \in \mathbb{N}^*$  είναι αριθμητική πρόοδος θα ισχύει ότι:

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega, \text{ για κάθε } v \in \mathbb{N}^*, \text{ άρα για } v = 7 \text{ θα έχουμε:}$$

$$\alpha_7 = \alpha_1 + (7 - 1)\omega = \alpha_1 + 6\omega \text{ δίνεται όμως ότι } \alpha_7 = -11, \text{ άρα}$$

$$\alpha_1 + 6\omega = -11 \Leftrightarrow \alpha_1 + 6 \cdot (-2) = -11 \text{ έτσι } \alpha_1 = 12 - 11 = 1, \text{ οπότε ο}$$

$$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega = 1 + 3(-2) = -5, \text{ οπότε η συνάρτηση } f(x) = \alpha_1 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_1, \\ \text{ λαμβάνει τη μορφή } f(x) = x^2 - 5x + 1.$$

**Δ.2.** Και η αντίστοιχη εξίσωση  $f(x) = 0$  γίνεται  $x^2 - 5x + 1 = 0$  έτσι για τις ρίζες  $x_1, x_2$  της  $x^2 - 5x + 1 = 0$  θα έχουμε από τον τύπο Vieta:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5}{1} = 5 \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1.$$

Τότε:

$$A = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 5$$

$$B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2}{x_1 x_2} + \frac{x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}$$

$$B = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{5^2 - 1}{1} = 23$$

$$\Gamma = \sqrt[3]{400(x_1 + x_2) - 2012x_1 x_2 + 12} = \sqrt[3]{400 \cdot 4 - 2012 \cdot 1 + 12}$$

$$\Gamma = \sqrt[3]{2000 - 2012 + 12} = 0$$

**Δ.3.** Η εξίσωση:  $|x^2 - B - 2| + |x - A| = \Gamma$  με βάση τα παραπάνω θα έχουμε :

$$|x^2 - 23 - 2| + |x - 5| = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 25| + |x - 5| = 0$$

Όμως  $|\alpha| + |\beta| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  και  $\beta = 0$ .

Έτσι  $|x^2 - 25| + |x - 5| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$  και  $x - 5 = 0$  και η κοινή λύση των δύο εξισώσεων είναι η  $x = 5$ .