Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Θέμα Α

Α1. Σελ 253

Α2. Σελ 191

Α3. Σελ 150

Α4. **α.** **Σ**
β. **Σ**
γ. **Λ**
δ. **Λ**
ε. **Λ**

Θέμα Β

Β1. Είναι

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z-1)\left(\overline{z-1}\right)+(z+1)\left(\overline{z+1}\right)=4 \Leftrightarrow$$

$$(z-1)\left(\bar{z}-1\right)+(z+1)\left(\bar{z}+1\right)=4 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}-z-\bar{z}+1+z\cdot\bar{z}+z+\bar{z}+1=4 \Leftrightarrow$$

$$2z\cdot\bar{z}=2 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Β2. Είναι

$$|z_1-z_2|^2=\sqrt{2}^2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)\left(\overline{z_1-z_2}\right)=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)\left(\bar{z}_1-\bar{z}_2\right)=2 \Leftrightarrow$$

$$z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=2 \Leftrightarrow |z_1|^2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+|z_2|^2=2 \Leftrightarrow$$

$$-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1=0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=0 \ (1)$$

Επίσης

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)=(z_1+z_2)\left(\bar{z}_1+\bar{z}_2\right)=$$

$$z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+|z_2|^2=$$

$$2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1\overset{(1)}{=}2+0=2$$

Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$.

Β3. Έχουμε

$$\left|w-5\bar{w}\right|=12 \Leftrightarrow \left|w-5\bar{w}\right|^2=12^2 \Leftrightarrow \left(w-5\bar{w}\right)\left(\bar{w}-5w\right)=144 \Leftrightarrow$$

$$w\bar{w}-5w^2-5\bar{w}^2+25w\bar{w}=144 \Leftrightarrow 26|w|^2-5\left(w^2+\bar{w}^2\right)=144 \ (2)$$

Για $w=x+yi$, με $x,y\in\mathbb{R}$ η (2) ισοδύναμα γίνεται:

$$26\left(x^2+y^2\right)-5\left[(x+yi)^2+(x-yi)^2\right]=144 \Leftrightarrow$$

$$26x^2+26y^2-5\left(x^2+2xyi+(yi)^2+x^2-2xyi+(yi)^2\right)=144 \Leftrightarrow$$

$$26x^2+26y^2-5x^2+5y^2-5x^2+5y^2=144 \Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow$$

$$\frac{16x^2}{144}+\frac{36y^2}{144}=\frac{144}{144}\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

Άρα η έλλειψη έχει α=3 και β=2, οπότε

$|w|_{\min}=\beta=2,\ |w|_{\max}=\alpha=3$

B4. $|z-w|\le|z|+|w|\le 1+|w|_{\max}=1+3=4$

Επίσης $|z-w|\ge\big||z|-|w|\big|\overset{|w|>|z|}{=}|w|-|z|\ge|w|_{\min}-|z|=2-1=1$

Θέμα Γ

Η συνάρτηση *f*, είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$$

και

$$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

Παρατηρώ ότι $f'(1)=0$ και αφού $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$ η f'θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και η ρίζα της $x=1$ είναι μοναδική. Έχουμε:

- $0<x<1\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<1\Rightarrow f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$ και
- $x>1\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)>1\Rightarrow f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$ και

Έχουμε επομένως τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↘	-1 min	↗

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Είναι

$$f(1)=-1$$
$$\lim_{x\to o^+}f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

Άρα $f((0,1])=[-1,+\infty)$ και $f([1,+\infty))=[-1,+\infty)$, Άρα το σύνολο τιμών θα είναι το $f((0,+\infty))=[-1,+\infty)$.

Γ2. $x^{x-1}=e^{2013},x>0$.

$$(x-1)\ln x=2013\Leftrightarrow(x-1)\ln x-1=2012\Leftrightarrow f(x)=2012$$

Είναι $2012\in f((0,1])$, άρα η $f(x)=2012$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα στο $(0,1)$ και αφού η f γνησίως φθίνουσα θα είναι μοναδική.

Είναι $2012 \in f\left(\left[1,+\infty\right)\right)$, άρα η $f(x)=2012$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα στο $(1,+\infty)$ και αφού η f γνησίως αύξουσα θα είναι μοναδική.

Γ3. Έστω $g(x)=f'(x)+f(x)-2012$ που είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, όπου $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (1,+\infty)$.

με

$$g(x_1)=f'(x_1)+2012-2012=f'(x_1)<0$$
$$g(x_2)=f'(x_2)+2012-2012=f'(x_2)>0$$

Άρα $g(x_1)g(x_2)<0$. Από Θ Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$.

Γ4. Είναι $g(x)=f(x)+1$, άρα $g(x)=(x-1)\ln x,\ x>0$.

Είναι $f(x)\geq -1 \Leftrightarrow f(x)+1\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0$ και $g(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ μοναδική ρίζα

$$E(\Omega)=\int_1^e g(x)\,dx=$$

$$=\int_1^e (x-1)\ln x dx=\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)' \ln x dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\int_1^e \left(\frac{x}{2}-1\right)dx=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left(\frac{e^2}{4}-e-\frac{1}{4}+1\right)=\frac{e^2-3}{4}\tau\mu$$

Θέμα Δ

Δ1. Αν $h(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt-\dfrac{x-x^2}{e}$ με $x\in(0,+\infty)$, αφού $x^2-x+1>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ διότι Δ<0.

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα $\int_1^x f(t)\,dt$ παραγωγίσιμη και αφού η x^2-x+1 είναι παραγωγίσιμη η $\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt$ θα είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων.

Οπότε η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$h'(x)=f\left(x^2-x+1\right)(2x-1)-\frac{1-2x}{e}$$

Αφού $h(x)\geq 0 \Leftrightarrow h(x)\geq h(1)$ στο $x=1$ η h παρουσιάζει ελάχιστο, οπότε από το Θ. Fermat θα είναι:

$$h'(1)=0 \Leftrightarrow f(1)-\frac{1-2}{e}=0 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}<0$$

Επομένως αφού $f(x)\neq 0$ και συνεχής θα διατηρεί πρόσημο και αφού $f(1)<0$ θα είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Έτσι $|f(x)|=-f(x)$.

Αν $\varphi(x)=\ln x-x,\ x>0$, θα είναι

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

$$\varphi'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x}\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\leq 1$$

Άρα είναι $\varphi'(x)>0$ στο $(0,1)$, άρα φ γν. αύξουσα στο $(0,1]$ και

$\varphi'(x)<0$ στο $(1,+\infty)$, άρα φ γν. φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ και έχει μέγιστο για $x=1$, άρα

$\varphi(x)\leq\varphi(1)=-1 \Leftrightarrow \ln x-x<-1<0$.

Οπότε αφού $|f(x)|=-f(x)$ έχουμε

$$\ln x-x=\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)f(x) \Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x-x}{\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)}$$

Οπότε $\ln x-x$ συνεχής και παραγωγίσιμη άρα και $\frac{\ln t-t}{f(t)}$ συνεχής οπότε $\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt$ παραγωγίσιμη. Επομήνως f παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων.

Άρα είναι

$$\ln x-x=\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)f(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x-x}{f(x)}=\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $\left(\frac{\ln x-x}{f(x)}\right)'=\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)'$ άρα

$$\left(\frac{\ln x-x}{f(x)}\right)'=\frac{\ln x-x}{f(x)}\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{\ln x-x}{f(x)}\right)'}{\frac{\ln x-x}{f(x)}}=1\Leftrightarrow\left(\ln\left(\frac{\ln x-x}{f(x)}\right)\right)'=1$$

Άρα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ να ισχύει

$$\ln\left(\frac{\ln x-x}{f(x)}\right)=x+c\Leftrightarrow\frac{\ln x-x}{f(x)}=e^{x+c}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x-x}{e^{x+c}}$$

$$f(1)=-\frac{1}{e}\Leftrightarrow\frac{\ln 1-1}{e^{1+c}}=-\frac{1}{e}\Leftrightarrow e=e^{1+c}\Leftrightarrow c=0.$$

Δηλαδή $f(x)=e^{-x}(\ln x-x),x>0$

Δ2. Αφού $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ θα είναι $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{f(x)}=0$.

Οπότε αν $u=\frac{1}{f(x)}$ τότε

$$\lim_{x\to0^+}\left(f(x)^2\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right)=\lim_{u\to0^+}\left(\frac{1}{u^2}\eta\mu u-\frac{1}{u}\right)=\lim_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u-u}{u^2}\underset{DHH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{u\to0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=0$$

Δ3. Είναι $F'(x)=f(x)<0$ από Δ1.

$$F''(x)=f'(x)=\left(e^{-x}(\ln x-x)\right)'=-e^{-x}(\ln x-x)+e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

$$=e^{-x}\left(-\ln x+x+\frac{1}{x}-1\right)>0$$

Άρα η F κυρτή

Στο $[x,2x]$ η F είναι συνεχής και παραγωγίσιμη άρα Θ.Μ.Τ υπάρχει

$$\xi_1\in(x,2x)\quad\tau.\omega\quad F'(\xi_1)=\frac{F(2x)-F(x)}{2x-x}=\frac{F(2x)-F(x)}{x}$$

Όμοια από Θ.Μ.Τ στο $[2x,3x]$ υπάρχει

$$\xi_2\in(2x,3x)\quad\tau.\omega\quad F'(\xi_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}=\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$

Η F είναι κυρτή οπότε η F' είναι γνησίως αύξουσα. Ισχύει

$$x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x$$
$$F'(\xi_1) < F'(\xi_2)$$
$$\frac{F(2x)-F(x)}{x} < \frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$
$$F(2x)-F(x) < F(3x)-F(2x)$$
$$2F(2x) < F(x)+F(3x)$$

Δ4. Είναι $g(x)=F(\beta)+F(3\beta)-2F(x)$, ορισμένη και συνεχής στο $[\beta,2\beta]$, αφού η F είναι παραγωγίσιμη το $(0,+\infty)$ και

$$\left.\begin{array}{l} g(\beta)=-F(\beta)+F(3\beta)<0 \ (*) \\ g(3\beta)=F(\beta)+F(3\beta)-2F(2\beta)>0 \ (\text{από}\,\Delta 3.) \end{array}\right. \text{άρα } g(\beta)\cdot g(3\beta)<0$$

(*) Διότι η F είναι γνησίως φθίνουσα γιατί $F'(x)=f(x)<0$

άρα $\beta<3\beta$ άρα $F(\beta)>F(3\beta)\Leftrightarrow F(3\beta)-F(\beta)<0$

Άρα από Θ Bolzano υπαρχει $\xi\in(\beta,2\beta)$ έτσι ώστε

$g(\xi)=0\Leftrightarrow F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$ και αφού η F γνησίως φθίνουσα είναι μοναδική.