Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής

Θέμα Α

Α1. σελ 31

Α2. σελ 148

Α3. σελ 96

Α4.
α) Λ
β) Σ
γ) Λ
δ) Σ
ε) Σ

Θέμα Β

Β1. Φτιάχνουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και κατόπιν προκύπτει ότι δ=25.

Β2. Είναι $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \Leftrightarrow v = a + 4 + 3a - 6 + 2a + 8 + a - 2 \Leftrightarrow v = 7a + 4$

Αφού η διάμεσος είναι 25 και F_2%=50 θα είναι

$$\frac{v_1 + v_2}{v} = 0,5 \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 0,5 \cdot v \Leftrightarrow \alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 0,5(7a - 4) \Leftrightarrow$$

$$4a - 2 = 0,5 \cdot (7a - 4) \Leftrightarrow a = 8$$

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_1	f_i%	N_i	F_i%
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο	-	60	100	-	-

Β3. Είναι $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = \dfrac{120 + 360 + 720 + 240}{60} = \dfrac{1440}{60} = 24$

και

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 v_i}{v} = \frac{(10-24)^2 \cdot 12 + (20-24)^2 \cdot 18 + (30-24)^2 \cdot 24 + (40-24)^2 \cdot 6}{60}$$

$$= \frac{5040}{60} = 84$$

Άρα $s = \sqrt{84} \approx 9,17$

Β4. $\dfrac{45-37}{10} \cdot 10\% = 8\%$, άρα το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά είναι 8%.

Θέμα Γ

Γ1. Έστω Α: «το ενδεχόμενο να μαθαίνει Γαλλικά» άρα

$$P(A) = \frac{3v}{v^2 + 1}$$

και Β: «το ενδεχόμενο να μαθαίνει Ισπανικά» άρα

$$P(B)=\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$$

Και τις δύο γλώσσες $P(A\cap B)=\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}$

Αφού

$$\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x^2+3-4\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=1$$

Άρα $P(A\cup B)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}=1$

οπότε το $A\cup B$ είναι βέβαιο, αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Γ2. Έχουμε

$$P(A\cup B)=1\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\nu+\nu+2-\nu-1}{\nu^2+1}=1\Leftrightarrow \frac{3\nu+1}{\nu^2+1}=1$$

$$\Leftrightarrow \nu^2+1=3\nu+1$$

$$\Leftrightarrow \nu(\nu-3)=0\Leftrightarrow \nu=3$$

γιατί $\nu\geq 3$

Γ3. Για ν=3 έχουμε $P(A)=\dfrac{9}{10}$, $P(B)=\dfrac{5}{10}$, $P(A\cap B)=\dfrac{4}{10}$.

Η πιθανότητα να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες ο μαθητής είναι

$$\begin{aligned}P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]&=P(A-B)+P(B-A)\\&=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\\&=\frac{9}{10}+\frac{5}{10}-2\cdot\frac{4}{10}=\frac{6}{10}\end{aligned}$$

Γ4.

$$N(A\cap B)=32\quad \textit{οπότε}$$

$$P(A\cap B)=\frac{4}{10}\Leftrightarrow \frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow \frac{32}{N(\Omega)}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow N(\Omega)=80$$

Θέμα Δ

Δ1.

$$f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{x},\ x>0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{(1+\ln^2 x)'\cdot x-(1+\ln^2 x)\cdot (x)'}{x^2}$$
$$=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-1-\ln^2 x}{x^2}$$
$$=\frac{2\ln x-1-\ln^2 x}{x^2}=-\frac{\ln^2 x-2\ln x+1}{x^2}=-\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}$$

Όπου $f'(x)<0$ για $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$

και $f'(x)=0$ για $x=e$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

Δ2.

$$E(x)=x\cdot f(x)=x\cdot\frac{1+\ln^2 x}{x}=(1+\ln^2 x)\ \ ,\ x>0$$

Είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων με :

$$E'(x)=2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}$$

$$E'(x)\ge 0\Leftrightarrow 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}\ge 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$$

$$E'(x)\le 0\Leftrightarrow 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}\le 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x\le 0\Leftrightarrow 0<x\le 1$$

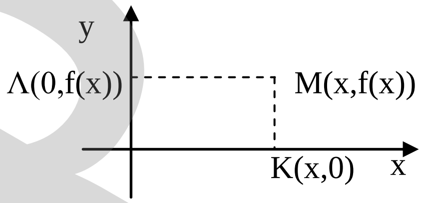
Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών

x	0	1	$+\infty$
E΄(x)	-	0	+
E(x)	↘		↗

Για x = 1 έχουμε ελάχιστο με τιμή $f(1)=\frac{1+\ln^2 1}{1}=1$

ΟΚ = 1

ΟΛ = 1 άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο



Δ3. Αφού η ε είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της C_f είναι $\lambda_\varepsilon=f'(1)=-1$.

Άρα ε: y = -x + β

Για τις τεταγμένες y_i των 10 σημείων ισχύει:

$\bar{y} = -\bar{x} + \beta$

$s_y = |-1| \cdot s_x = s_x = 2$

Άρα για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει :

$$CV_y \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s_y}{|\bar{y}|} \le 0{,}1 \overset{\beta \ne 10}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow \frac{2}{|-10+\beta|} \le 0{,}1 \Leftrightarrow 2 \le 0{,}1 \cdot |-10+\beta|$$

$$\Leftrightarrow 20 \le |\beta - 10| \Leftrightarrow \beta - 10 \le -20 \quad \text{ή} \quad \beta - 10 \ge 20$$

$$\Leftrightarrow \beta \le -10 \quad \text{ή} \quad \beta \ge 30$$

Δ4. Είναι $A \ne \varnothing$ και $A \cap B \ne \varnothing$ άρα αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα θα είναι $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} > 0$ και $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} > 0$, άρα

Ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A} \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Rightarrow 0 < \mathrm{P(A)} \le \mathrm{P(A \cup B)} \overset{f \searrow (0,+\infty)}{\Rightarrow} f(\mathrm{P(A)}) \ge f(\mathrm{P(A \cup B)}) \\ \mathrm{A \cap B} \subseteq \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \Rightarrow 0 < \mathrm{P(A \cap B)} \le \mathrm{P(A \cup B)} \overset{f \searrow (0,+\infty)}{\Rightarrow} f(\mathrm{P(A \cap B)}) \ge f(\mathrm{P(A \cup B)}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$f(\mathrm{P(A)}) + f(\mathrm{P(A \cap B)}) \ge 2 \cdot f(\mathrm{P(A \cup B)})$$