Μαθηματικά ΕΠΑ.Λ. (Α΄ Ομάδα)

Θέμα Α

Α1. σελ 81 σχολικού βιβλίου

Α2.
α. Σ
β. Σ
γ. Λ
δ. Σ
ε. Σ

Α3.
α. $\int_a^\beta \frac{1}{x}dx = \ln\beta - \ln a$, με $\beta > \alpha > 0$

β. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

γ. $\int_a^\beta c dx = c(\beta - a)$

Θέμα Β

Β1.

Είναι

$$\begin{aligned} &\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu \Leftrightarrow \\ &6+5+4+\kappa+2\kappa+1 = 25 \Leftrightarrow \\ &16 + 3\kappa = 25 \Leftrightarrow \\ &3\kappa = 25 - 16 \Leftrightarrow \\ &3\kappa = 9 \Leftrightarrow \kappa = 3 \end{aligned}$$

Β2.

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος xi	Μαθητές ν_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα (%) f_i	$x_i\nu_i$
1	6	6	24	6
2	5	11	20	10
3	4	15	16	12
4	3	18	12	12
5	7	25	28	35
Σύνολα	25		100	75

Διότι $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 100 = \frac{\nu_i}{25} \cdot 100 = 4\nu_i$, οπότε

$$\begin{aligned} f_1 &= 4 \cdot \nu_1 = 4 \cdot 6 = 24 \\ f_2 &= 4 \cdot \nu_2 = 4 \cdot 5 = 20 \\ f_3 &= 4 \cdot \nu_3 = 4 \cdot 4 = 16 \\ f_4 &= 4 \cdot \nu_4 = 4 \cdot 3 = 12 \\ f_5 &= 4 \cdot \nu_5 = 4 \cdot 7 = 28 \end{aligned}$$

Β3. Είναι $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i = \frac{1}{25} \cdot 75 = 3$

Αν διατάξουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά η διάμεσος θα είναι η 13^η παρατήρηση, δηλ. $\delta = 3$

Β4. Τουλάχιστον 3 ώρες διαβάζουν 16%+12%+28%=56% των μαθητών.

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2+\beta x\right) = a+\beta$

Γ2.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}$$
$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x+3}+2\right) = \sqrt{4}+2 = 4$$

Γ3. Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a+\beta = 4$$

Για να διέρχεται από το σημείο Α(-1,2) πρέπει $f(-1) = 2 \Leftrightarrow a-\beta = 2$.

Άρα προκύπτει:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \underline{\alpha-\beta=2}\end{cases} \qquad \text{άρα} \begin{cases}\alpha=3\\ \beta=1\end{cases}.$$
$$2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f(x) = 3x^2-2x-1 \quad, x\in\mathbb{R}$, οπότε μια παράγουσα της f είναι η:

$$F(x) = x^3-x^2-x+c,\ \text{με } c\in\mathbb{R}.$$

Είναι $F(0)=1 \Leftrightarrow c=1$, οπότε $F(x) = x^3-x^2-x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Είναι

$$F'(x) = f(x) = 3x^2-2x-1$$
$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2-2x-1 = 0$$
$$\Delta = 4+12 = 16$$
$$x_{1,2} = \frac{2\pm 4}{6} \Leftrightarrow x_1 = 1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x_2 = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών,

x	$-\infty$ -1/3	1	$+\infty$
$f(x) = F'(x)$	+	-	+
$F(x)$	↗	↘	↗

Επομένως η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$,

γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[1, +\infty)$.

Έχει **τοπικό μέγιστο** το $F\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1=\frac{32}{27}$ και.

τοπικό ελάχιστο το $F\left(1\right)=1-1-1+1=0$.

Δ3. Στο $x\in\left(1,+\infty\right)$ η F είναι **γνησίως αύξουσα** και

$$2011<2012 \text{ άρα } F(2011)<F(2012)$$

Δ4. Αφού $f(x)=3x^2-2x-1$

x	$-\infty$ -1/3	1	$+\infty$
$f(x)$	+	-	+

Προκύπτει ο παραπάνω πίνακας προσήμων και για $x\in\left[0,1\right]$ είναι $f\left(x\right)<0$.

Άρα

$$E\left(\Omega\right)=\int_0^1\left(-f(x)\right)dx=\int_1^0 f(x)dx=\int_1^0\left(F(x)\right)'dx$$

$$=\left[F(x)\right]_1^0=F(0)-F(1)=1-0=1\,\tau.\mu$$