

Μαθηματικά ΕΠΑ.Λ. (Α' Ομάδα)

Θέμα Α

Α1. σελ 81 σχολικού βιβλίου

Α2. α. Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Σ

Α3. α. $\int_a^\beta \frac{1}{x} dx = \ln \beta - \ln a$, με $\beta > \alpha > 0$ β. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ γ. $\int_a^\beta c dx = c(\beta - a)$

Θέμα Β

Β1.

Είναι

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 &= v \Leftrightarrow \\ 6 + 5 + 4 + \kappa + 2\kappa + 1 &= 25 \Leftrightarrow \\ 16 + 3\kappa &= 25 \Leftrightarrow \\ 3\kappa &= 25 - 16 \Leftrightarrow \\ 3\kappa &= 9 \Leftrightarrow \kappa = 3 \end{aligned}$$

Β2.

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	Μαθητές v_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα (%) f_i	$x_i v_i$
1	6	6	24	6
2	5	11	20	10
3	4	15	16	12
4	3	18	12	12
5	7	25	28	35
Σύνολα	25		100	75

Διότι $f_i \% = \frac{v_i}{v} \cdot 100 = \frac{v_i}{25} \cdot 100 = 4v_i$, οπότε

$$f_1 = 4 \cdot v_1 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$f_2 = 4 \cdot v_2 = 4 \cdot 5 = 20$$

$$f_3 = 4 \cdot v_3 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$f_4 = 4 \cdot v_4 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$f_5 = 4 \cdot v_5 = 4 \cdot 7 = 28$$

Β3. Είναι $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i v_i = \frac{1}{25} \cdot 75 = 3$

Αν διατάξουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά η διάμεσος θα είναι η 13^η παρατήρηση, δηλ. $\delta = 3$

B4. Τουλάχιστον 3 ώρες διαβάζουν $16\%+12\%+28\%=56\%$ των μαθητών.

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + \beta x) = a + \beta$

Γ2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3}+2) = \sqrt{4}+2 = 4 \end{aligned}$$

Γ3. Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + \beta = 4$$

Για να διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$ πρέπει $f(-1) = 2 \Leftrightarrow a - \beta = 2$.

Άρα προκύπτει:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \quad \text{άρα} \quad \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε μια παράγουσα της f είναι η:

$$F(x) = x^3 - x^2 - x + c, \text{ με } c \in \mathbb{R}.$$

Είναι $F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$, οπότε $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Είναι


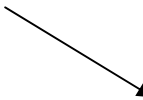
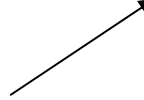
$$F'(x) = f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{6} \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ και } x_2 = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Οπότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών,

x	$-\infty$	$-1/3$	1	$+\infty$
$f(x) = F'(x)$		+	-	+
$F(x)$				

Επομένως η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$,

γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ και **γνησίως αύξουσα** στο $[1, +\infty)$.

Έχει **τοπικό μέγιστο** το $F\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{32}{27}$ και.

τοπικό ελάχιστο το $F(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$.

Δ3. Στο $x \in (1, +\infty)$ η F είναι **γνησίως αύξουσα** και
 $2011 < 2012$ άρα $F(2011) < F(2012)$

Δ4. Αφού $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

x	$-\infty$	$-1/3$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	

Προκύπτει ο παραπάνω πίνακας προσήμων και για $x \in [0, 1]$ είναι $f(x) < 0$.

Άρα

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^1 (-f(x)) dx = \int_1^0 f(x) dx = \int_1^0 (F(x))' dx \\ &= [F(x)]_1^0 = F(0) - F(1) = 1 - 0 = 1 \text{ τ.μ} \end{aligned}$$