Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης 2011

Θέμα Α

A1. σελ. 260

A2. σελ. 280

A3. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

Θέμα Β

B1. Είναι

$$|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+\left|\overline{\overline{z}+3i}\right|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow$$

$$|z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1 \Leftrightarrow \text{κύκλος κέντρου } K(0,\ 3) \text{ και } \rho=1$$

B2. Είναι

$$\overline{z}+3i=\frac{1}{z-3i} \Leftrightarrow (\overline{z}+3i)\,(z-3i)=1 \Leftrightarrow (\overline{z}+3i)(\overline{\overline{z}+3i})=1 \Leftrightarrow$$

$$|\overline{z}+3i|^2=1 \Leftrightarrow \left|\overline{\overline{z}+3i}\right|^2=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow |z-3i|=1 \text{ (ισχύει)}$$

B3.

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i} \Leftrightarrow w=z-3i+\overline{z}+3i \Leftrightarrow w=z+\overline{z} \Leftrightarrow w=2Re(z)\in\mathbb{R}$$

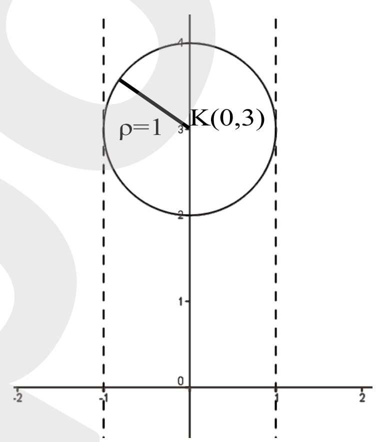
$$-2\le 2Re(z)\le 2 \Leftrightarrow -1\le Re(z)\le 1 \Leftrightarrow |Re(z)|\le 1 \text{ (ισχύει)}$$

Διότι, αν $z=x+yi$, με $x,\ y\in\mathbb{R}$, τότε, αφού

$$|z-3i|=1 \Leftrightarrow |x+(y-3)i|=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}=1,$$

θα είναι:

$$|Re(z)|=|x|=\sqrt{x^2}\le\sqrt{x^2+(y-3)^2}=1$$



B4.

$$w=2Re(z)=2x$$

$$|z-2x|=|z| \Leftrightarrow |x+yi-2x|=|x+yi| \Leftrightarrow |-x+yi|=|x+yi| \text{ (ισχύει)}$$

Θέμα Γ

Γ1.

$$e^x\big(f'(x)+f''(x)-1\big)=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf''(x)-e^x=\big(xf'(x)\big)'\Leftrightarrow$$

$$\big(e^xf'(x)-e^x\big)'=\big(xf'(x)\big)'$$

Άρα από γνωστό θεώρημα υπάρχει πραγματικός αριθμός c_1 ώστε $e^xf'(x)-e^x=xf'(x)+c_1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Για $x=0$ είναι $e^0f'(0)-e^0=0f'(0)-1\Leftrightarrow c_1=-1$.
Έστω $h(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$ με $h'(x)=e^x-1$.

$$h'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘		↗

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$, άρα στο $x=0$ έχει ελάχιστο το $h(0)=1>0$.
Επομένως $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Είναι

$$f'(x)e^x-xf'(x)=e^x-1\Leftrightarrow f'(x)(e^x-x)=e^x-1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$$

Άρα από γνωστό θεώρημα υπάρχει πραγματικός αριθμός c_2 ώστε $f(x)=\ln(e^x-x)+c_2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Οπότε αφού $f(0)=0\Leftrightarrow c_2=0$.
Άρα $f(x)=\ln\left(e^x-x\right),\ x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x},\ x\in\mathbb{R}$.

$$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{e^x-1}{e^x-x}\geq 0\Leftrightarrow e^x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$$

Άρα ελάχιστο το $f(0)=0$. Οπότε $f(x)\geq 0$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ3.

$$\begin{aligned}f''(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x-x}\right)'&=\frac{(e^x-1)'(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-x)'}{(e^x-x)^2}=\\&=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\\&=\frac{e^{2x}-xe^x-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x-x)^2}=\\&=\frac{-xe^x+2e^x-1}{(e^x-x)^2}\end{aligned}$$

Έστω $g(x) = 2e^x - xe^x - 1$, με $g'(x) = e^x(1-x)$.
Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1-x) = 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Θα είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x(1-x) > 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$
άρα η g γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 1]$ και
θα είναι $g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x(1-x) < 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$
άρα η g γνησίως φθίνουσα στο $[1,\ +\infty)$.
Για $x \in (-\infty,\ 1]$ έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}(2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-x}{e^{-x}} - 1\right) = 0 - 1 = -1$$

$$g(1) = e - 1$$

άρα το σύνολο τιμών είναι $g\left((-\infty,\ 1]\right) = (-1, e-1]$.

- $0 \in g\left((-\infty,\ 1]\right)$, άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty,\ 1)$, ώστε $g(x_1) = 0$, άρα $f''(x_1) = 0$.
  Αφού η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 1]$ και $x < x_1$ θα είναι $g'(x) < g'(x_1) = 0$ και $x > x_1$ θα είναι $g'(x) > g'(x_1) = 0$. Άρα για $x < x_1$ είναι $f''(x) < 0$ και για $x > x_1$ είναι $f''(x) > 0$. Οπότε στο x_1 έχει σημείο καμπής.

Για $x \in [1,\ +\infty)$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}(2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x\to+\infty}((2-x)e^x - 1) = -\infty$$

Άρα $g\left([1,\ +\infty)\right) = (-\infty,\ e-1]$.

- $0 \in (-\infty,\ e-1]$ άρα υπάρχει $x_2 \in (-\infty,\ e-1)$ ώστε $g(x_2) = 0$ δηλαδή $f''(x_2) = 0$.
  Αφού η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,\ +\infty)$ και $x < x_2$ θα είναι $g'(x) > g'(x_2) = 0$ και $x > x_2$ θα είναι $g'(x) < g'(x_2) = 0$. Άρα για $x < x_2$ είναι $f''(x) > 0$ και για $x > x_2$ είναι $f''(x) < 0$. Οπότε στο x_2 έχει σημείο καμπής.

Γ4. Έστω $\phi(x) = \ln(e^x - x) - \text{συν}x$. Η $\phi(x)$ συνεχής στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών και $\phi(0) = -1$ και $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > 0$ λόγω της (1).
Ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano άρα η εξίσωση $\phi(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.
Είναι $\phi'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} + \text{ημ}x > 0$, για $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, διότι στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ είναι ημ$x > 0$ και $e^x - 1 > 0$, ενώ $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Οπότε η $\phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, άρα η λύση είναι μοναδική.
Επομένως η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \text{συν}x$ έχει μοναδική λύση στο $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Θέμα Δ

Δ1.

$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$$

έστω $u = x + t \Leftrightarrow x = u - t$ άρα $du = dt$ και
για $t = 0$ είναι $u_1 = x$ και

για $t=-x$ είναι $u_2=0$.
η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du\Leftrightarrow\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\frac{1}{e^{2x}}\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du+1$$

αφού η g συνεχής η $\phi(u)=\dfrac{e^{2u}}{g(u)}$ συνεχής ως πράξεις συνεχών άρα η f παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}\ (1)$$

Όμοια για τη g έχουμε

$$g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}\ (2)$$

Από την (1) και τη (2) έχουμε

$$f'(x)g(x)=g'(x)f(x)\Leftrightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0\overset{g(x)>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0$$

Άρα $\dfrac{f(x)}{g(x)}=c_1$. Οπότε $f(x)=c_1\cdot g(x)$.
Είναι $f(0)=1+\displaystyle\int_0^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du=1$ και $g(0)=1+\displaystyle\int_0^0\frac{e^{2u}}{f(u)}du=1$,
άρα $c_1=1$, οπότε $f(x)=g(x)$.

Δ2. Από (1) για $f(x)=g(x)$ έχουμε

$$f(x)f'(x)=e^{2x}\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2e^{2x}$$

Άρα $\left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$, οπότε $f^2(x)=e^{2x}+c_2$.
Έπειδή $f(0)=1$ και $e^0=1$ θα είναι $c_2=0$.
Άρα $f^2(x)=e^{2x}$. Η f συνεχής και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f(x)=e^x$.

Δ3.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\dfrac{1}{x}}\overset{DLH}{=}$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^-}(-e^{-\frac{1}{x}})=-\infty$$

Δ4.

$$F(x) = \int_1^x f(t^2)dt = \int_1^x e^{t^2} dt$$

Αφού $f\left(t^2\right) = e^{t^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν $x \in [0,\ 1]$ είναι

$$F(x) = \int_1^x f(t^2)dt = -\int_x^1 f(t^2)dt \leq 0$$

Επομένως

$$E = \int_0^1 |F(x)|dx = -\int_0^1 F(x)dx = -\left[xF(x)\right]_0^1 + \int_0^1 xF'(x)dx = -1F(1)+0+\int_0^1 xe^{x^2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{e-1}{2} \text{τ.μ.}$$