



ΕΠΑ.Λ. Β' ΟΜΑΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- Α. Απόδειξη (βλ. σχολικό σελ.31)
- Β. α. ορισμός (βλ. σχολικό σελ.149)
β. ορισμός (βλ. σχολικό σελ.66)
- Γ. α. Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2

- Α. Πρέπει $x^2 + 1 \geq 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έτσι $A = \mathbb{R}$
- Β. α. $f'(x) = \left(\ln(x^2 + 1) + x + \sqrt{x + 15} \right)' = \frac{2x}{x^2 + 1} + 1 = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$
- β. $\lim_{x \rightarrow -1} \left[f'(x) \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \right) =$
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2}{(x - 2) \cdot (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{-1 + 1}{-1 - 2} = \frac{0}{-3} = 0.$
- Γ. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με την C_f .
 Αφού $(\varepsilon) // (\eta)$ πρέπει: $f'(x_0) = 1 \Rightarrow \frac{x_0^2 + 2x_0 + 1}{x_0^2 + 1} = 1 \Rightarrow x_0^2 + 2x_0 + 1 = x_0^2 + 1 \Rightarrow$
 $2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0.$
 Αφού $f(0) = \ln 1 + \sqrt{0 + 15} = \sqrt{15}$, το σημείο επαφής είναι $M(0, \sqrt{15})$
 Έτσι $(\varepsilon): y = f'(0) \cdot x + \beta$ δηλαδή $(\varepsilon): y = x + \beta$
 Όμως $M \in (\varepsilon) \Rightarrow \sqrt{15} = 0 + \beta \Rightarrow \beta = \sqrt{15}$ έτσι $(\varepsilon): y = x + \sqrt{15}.$
- Δ. για $x_1 = 0$ έχω $y_1 = \sqrt{15}$
 για $x_2 = 1$ έχω $y_2 = 1 + \sqrt{15}$
 για $x_3 = 9$ έχω $y_3 = 9 + \sqrt{15}$
 για $x_4 = 10$ έχω $y_4 = 10 + \sqrt{15}$

Οι τιμές αυτές σε αύξουσα σειρά είναι:

$$\sqrt{a+15}, \sqrt{a+15}+1, \sqrt{a+15}+9, \sqrt{a+15}+10$$

$$\delta = \frac{\sqrt{a+15}+1+\sqrt{a+15}+9}{2} = \frac{2\sqrt{a+15}+10}{2} = \sqrt{a+15}+5$$

$$\text{Αφού } \delta = 50 \Rightarrow \sqrt{a+15}+5 = 50 \Rightarrow \sqrt{a+15} = 45 \Rightarrow a+15 = 2025 \Rightarrow a = 2010$$

ΘΕΜΑ 3

- A.** Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος n , έτσι $n = 50$.
- B.** Τα εμβαδά των ορθογωνίων είναι ίσα με τις αντίστοιχες συχνότητες.

Κλάσεις [-)	x_i	v_i	f_i	$f_i \%$	N_i	F_i	$F_i \%$
0 - 4	2	4	0,08	8	4	0,08	8
4 - 8	6	7	0,14	14	11	0,22	22
8 - 12	10	18	0,36	36	29	0,58	58
12 - 16	14	13	0,26	26	42	0,84	84
16 - 20	18	8	0,16	16	50	1	100
Σύνολο		$n = 50$	1	100			

$$\text{Αφού } n = 50 \Rightarrow N_4 + v_5 = 50 \Rightarrow 6v_2 + 8 = 50 \Rightarrow 6v_2 = 42 \Rightarrow v_2 = 7$$

$$N_4 = 42 \Rightarrow 4 + 7 + 18 + v_4 = 42 \Rightarrow v_4 = 13$$

- Γ. α. A:** «ο μαθητής έχει βαθμό από 10 έως 17» τότε

$$N(A) = \frac{1}{2} \cdot v_3 + v_4 + \frac{1}{4} \cdot v_5 = 9 + 13 + 2 = 24 \text{ οπότε}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{24}{50} = 0,48 \text{ ή } 48\%$$

- β. B:** «ο μαθητής έχει βαθμό κάτω από 10 ή τουλάχιστον 16»

$$N(B) = v_1 + v_2 + \frac{1}{2} v_3 + v_5 = 4 + 7 + 9 + 8 = 28. \text{ Έτσι}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{28}{50} = 0,56 \text{ ή } 56\%$$

ΘΕΜΑ 4

- A.** Έχουμε: $2P(2) = \frac{P(3)}{3} = P(6) = P(k) = \frac{P(\lambda)}{2} = \theta \in R$

$$\text{Αφού } P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(\kappa) + P(\lambda) + P(\mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta + 2\theta + P(\mu) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P(\mu) = \frac{1}{2} - 3\theta \quad (1)$$

$$\text{Όμως } P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(2) + P(3) + P(6) + P(\kappa) + P(\lambda) + P(\mu) = 1 \Rightarrow^{(1)}$$

$$\frac{\theta}{2} + 3\theta + \theta + \theta + 2\theta + \frac{1}{2} - 3\theta = 1 \Rightarrow$$

$$4\theta + \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{2}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{9}$$

$$\text{Έτσι: } P(2) = \frac{1}{18}, P(3) = \frac{1}{3}, P(6) = \frac{1}{9}, P(\kappa) = \frac{1}{9}, P(\lambda) = \frac{2}{9}, P(\mu) = \frac{1}{6}$$

B. $f'(x) = \lambda x^2 - 24x + 20$

$$\text{Αφού η } (\epsilon) // (\eta) \Rightarrow f'(-1) = 48 \Rightarrow \lambda + 44 = 48 \Rightarrow \lambda = 4$$

$$\text{Έτσι } f'(x) = 4x^2 - 24x + 20$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 24x + 20 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$		↗	↘	↗

$$\text{Άρα } \kappa = 1 \text{ και } \mu = 5$$

$$\text{Έτσι } \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Γ. πρέπει $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ \sqrt{2x - 3} - \sqrt{5} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ \sqrt{2x - 3} \neq \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ 2x - 3 \neq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3/2 \\ x \neq 4 \end{cases}$

$$\text{και αφού } x \in \Omega \text{ άρα: } x = 2 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = 5 \text{ ή } x = 6$$

$$\text{έτσι } B = \{2, 3, 5, 6\}$$

Δ. Οι 4 παρατηρήσεις είναι τα $\frac{4}{160} = \frac{1}{40} = 2,5\%$ του συνόλου των παρατηρήσεων.

$$\text{Έτσι αφού έχω κανονική κατανομή πρέπει: } \bar{x} + 2s = 20 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } R = \frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 6s = \frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 24s = 3\bar{x} \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow 24s = 3(20 - 2s) \Rightarrow 24s = 60 - 6s \Rightarrow 30s = 60 \Rightarrow s = 2$$

$$\text{Έτσι από (1)} \Rightarrow \bar{x} + 4 = 20 \Rightarrow \bar{x} = 16$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι: } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} > \frac{1}{10}, \text{ έτσι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

Προσθέτοντας τον ίδιο θετικό σταθερό αριθμό c σε όλες τις τιμές της μεταβλητής έχω: $s' = s = 2$ και $\bar{x}' = \bar{x} + c = 16 + c$.

Για να είναι ομοιογενές το νέο δείγμα τιμών πρέπει:

$$CV' \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{s'}{\bar{x}'} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{16 + c} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$20 \leq 16 + c \Rightarrow c \geq 4 \text{ και αφού } c \in \Omega \text{ έχω: } c = 4 \text{ ή } c = 5 \text{ ή } c = 6$$

$$\text{Έτσι } \Gamma = \{4, 5, 6\}$$

Ε. Έχουμε: $A \cap \Gamma = \{4,5\}$

$$B - \Gamma = \{2,3\}$$

$$A \cup \Gamma = \{1,4,5,6\}$$

$$B \cup A' = \{2,3,5,6\}, \text{ αφού } A' = \{2,3,6\}$$

$$\text{Έτσι } P(A \cap \Gamma) = P(4) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

$$P(B - \Gamma) = P(2) + P(3) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18}$$

$$P(A \cup \Gamma) = P(1) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

$$P(B \cup A') = P(2) + P(3) + P(5) + P(6) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{12}{18}$$