Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ′ Λυκείου

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 304

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 279

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 273

Α3. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

Θέμα Β

Β1. Είναι

$$z+\frac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0,\ z\neq 0$$

$$\Delta = 4-8=-4,\ \text{άρα } z_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4i}}{2}=\begin{cases} z_1=\dfrac{2+2i}{2}=1+i \\ z_2=\dfrac{2-2i}{2}=1-i\end{cases}$$

Β2. $z_1^2=(1+i)^2=2i$
$z_2^2(1-i)^2=-2i$

$$\begin{aligned} z_1^{2010}+z_2^{2010} &= (z_1^2)^{1005}+(z_2^2)^{1005} \\ &= (2i)^{1005}+(-2i)^{1005} \\ &= 2^{1005}\cdot i^{1005}+(-2)^{1005}\cdot i^{1005} \\ &= 2^{1005}\cdot i^{1005}-2^{1005}\cdot i^{1005}=0 \end{aligned}$$

Β3.

$$|w-4+3i|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |w-4+3i|=|1+i-1+i| \Leftrightarrow$$

$$|w-4+3i|=|2i| \Leftrightarrow |w-4+3i|=2 \Leftrightarrow |w-(4-3i)|=2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι κύκλος με κέντρο $K(4,\ -3)$ και $\rho=2$.

Β4.

$$||w|-5|\leq |w-(4-3i)|\leq |w|+5 \Leftrightarrow |w-5|\leq 2 \Leftrightarrow$$

$$-2\leq |w|-5\leq 2 \Leftrightarrow 3\leq |w|\leq 7$$

Θέμα Γ

Γ1.

$$f'(x)=2+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2x^2+2x+2}{x^2+1}>0,\ x\in\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2.

$$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{(x^4+1)}\right] \Leftrightarrow$$

$$2x^2-2(3x-2)=\ln[(3x-2)^2+1]-\ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2)=f(3x-2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x^2=3x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$$

Άρα $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$.

Γ3.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(4x+2)(x^2+1)-(2x^2+2x+2)\cdot 2x}{(x_{+}^{2}1)^2}\\
&= \frac{4x^3+4x+2x^2+2-4x^3-4x^2-4x}{(x^2+1)^2}\\
&= \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

x	$-\infty$ -1	-1 1	1 $+\infty$
$f''(x)$	-	+	-
$f(x)$	∩	∪	∩

Είναι

$$
\begin{gathered}
f(-1)=-2+\ln 2 \text{ άρα } A(-1,\ln 2-2)\\
f(1)=2+\ln 2 \text{ άρα } B(1,\ln 2+2)
\end{gathered}
$$

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων είναι:

$$(\varepsilon_1): y-f(-1)=f'(-1)(x+1), \text{ και } f'(-1)=1$$

Άρα

$$y=x+\ln 2-1$$

$$(\varepsilon_2): y-f(1)=f'(1)(x-1), \text{ και } f'(1)=3$$

Άρα

$$y=3x+\ln 2-1$$

$$\begin{cases} y=x+\ln 2-1\\ y=3x+\ln 2-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=\ln 2-1\end{cases}$$

Γ.4

$$I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(2x^2+x\ln(x^2+1)\right)dx=\int_{-1}^{1}2x^2dx+\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)dx$$

Είναι:

- $\int_{-1}^{1}2x^2dx=\left[2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$
- $\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)dx=\int_{2}^{2}\ln u du=0,$
  το οποίο προκύπτει θέτοντας

$$
\begin{aligned}
u&=x^2+1\\
du=2xdx, \text{ άρα } \frac{1}{2}du&=xdx\\
u_1&=(-1)^2+1=2\\
u_2&=1^2+1=2
\end{aligned}
$$

Άρα
$$I = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

Θέμα Δ

Δ1. Η $h(t) = \dfrac{t}{f(t) - t}$ είναι συνεχής οπότε η f παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{x}{f(x) - x} + 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x + f(x) - x}{f(x) - x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) - x},\ x \in \mathbb{R}$$

Δ2.
$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) \\ g'(x) &= 2f'(x) \cdot (f(x) - x) - 2f(x) \\ g'(x) &= 2 \cdot (f(x) - x) \cdot \frac{f(x)}{f(x) - x} - 2f(x) \\ g'(x) &= 2f(x) - 2f(x) \end{aligned}$$

Άρα $g'(x) = 0$, επομένως $g(x) = c$ και επειδή $f(0) = 3$ θα είναι
$$g(0) = (f(0))^2 - 2 \cdot 0 \cdot f(0) = 9$$

Άρα $g(x) = 9$.

Δ3.
$$(f(x))^2 - 2xf(x) = 9 \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = 9 + x^2$$

Άρα $(f(x) - x)^2 = 9 + x^2$.
Έστω $h(x) = f(x) - x,\ h(0) = 3$
$h^2(x) = 9 + x^2,\ 9 + x^2 \neq 0$, άρα $h(x) \neq 0$.
Η $h(x)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται άρα διατηρεί πρόσημο, οπότε:
$$h(x) = \sqrt{9 + x^2},\ \text{ή}\ h(x) = -\sqrt{9 + x^2}$$

Όμως η δεύτερη απορρίπτεται διότι $h(0) = 3$. Άρα
$$f(x) - x = \sqrt{9 + x^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{9 + x^2} + x$$

Δ4. Έστω $F(x) = \displaystyle\int_\alpha^x f(t)dt$.
Η $F(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[x,\ x + 1]$ και $[x + 1,\ x + 2]$.
Υπάρχει επομένως $\xi_1 \in (x,\ x + 1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} F'(\xi_1) &= \frac{F(x + 1) - F(x)}{x + 1 - x} \\ &= \int_\alpha^{x+1} f(t)dt - \int_\alpha^x f(t)dt \\ &= \int_\alpha^{x+1} f(t)dt + \int_x^\alpha f(t)dt \\ &= \int_x^{x+1} f(t)dt \end{aligned}$$

Όμοια $\xi_2 \in (x+1,\ x+2)$ με

$$\begin{aligned} F'(\xi_2) &= \frac{F(x+2)-F(x+1)}{x+2-x-1} \\ &= \int_{\alpha}^{x+2} f(t)dt - \int_{\alpha}^{x+1} f(t)dt \\ &= \int_{\alpha}^{x+2} f(t)dt + \int_{x+1}^{\alpha} f(t)dt \\ &= \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt \end{aligned}$$

Είναι

$$F'(x) = f(x)$$
$$F''(x) = f'(x) = \frac{x+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}} > 0$$

Αφού $x+\sqrt{9+x^2} > x+\sqrt{x^2} > x+|x| \geq 0$, άρα η F' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι

$$\xi_1 < \xi_2 \text{ άρα αφού η } F' \text{ είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε } F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$\int_{x}^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$$