Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ' Λυκείου

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 93

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 140

Α3. α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Λ ε. Λ

Θέμα Β

$$f(x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1,\ x \in \mathbb{R}$$

Β1. Είναι

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-2}{x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x^2-x+1-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Β2. Είναι

$$f'(x) = (2\sqrt{x^2-x+1}-1)' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}} \cdot (x^2-x+1)' = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης στο x_0 είναι $\lambda = f'(0) = \dfrac{-1}{1} = -1$.

Β3. Είναι $\lambda = \text{εφ}\omega$, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$. Άρα $\text{εφ}\omega = -1$, οπότε $\omega = \dfrac{3\pi}{4}$.

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $x_2 = \dfrac{c+2c}{2} = \dfrac{3c}{2} \Leftrightarrow 6 = \dfrac{3c}{2} \Leftrightarrow c = 4$

Γ2.

Κλάσεις	x_i	ν_i	$x_i\nu_i$	x_i^2	$x_i^2\nu_i$
[0, 4)	2	20	40	4	80
[4, 8)	6	40	240	36	1440
[8, 12)	10	45	450	100	4500
[12, 16)	14	30	420	196	5880
[16, 20)	18	25	450	324	8100
Αθροίσματα	-	160	1600	-	20000

$$\overline{x} = \frac{1}{160}\sum_{i=1}^{5} x_i\nu_i = \frac{1600}{160} = 10kg$$

$$s^2 = \frac{1}{160}\left\{\sum_{i=1}^{5} x_i^2\nu_i - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{5} x_i\nu_i\right)^2}{160}\right\} = \frac{1}{160}\left[20000 - \frac{1600^2}{160}\right] = 25$$

Άρα $s = \sqrt{25} = 5Kg$.

Γ3. Είναι $CV = \frac{s}{|\overline{x}|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} > \frac{1}{10}$. Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Γ4. Μέσα σε κάθε κλάση οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, άρα $N(A) = \frac{1}{4}\cdot 40 + 45 + \frac{1}{2}\cdot 30 = 70$.

Τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα οπότε από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας προκύπτει:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}$$

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f(x) = \ln(x - P(A)) - \frac{1}{2}(x - P(A))^2 + P(B),\ x > P(A)$.

Οπότε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x - P(A)}(x - P(A))' - \frac{1}{2}\cdot 2(x - P(A))(x - P(A))' \\ &= \frac{1}{x - P(A)} - (x - P(A)) = \frac{1 - (x - P(A))^2}{x - P(A)} \qquad , x > P(A) \end{aligned}$$

Επομένως

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - P(A))^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - P(A) = 1 & \text{ή} \\ x - P(A) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = P(A) + 1 & \text{ή} \\ x = P(A) - 1 & \text{Απορρίπτεται} \end{cases}$$

x	P(A)		P(A)+1		+∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

Δ2. Η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = \frac{5}{3}$ με $f(x_0) = 0$.

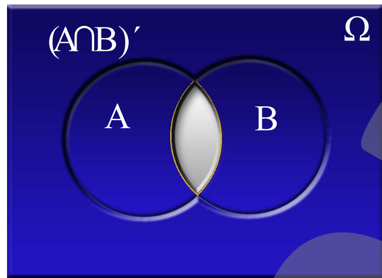
Άρα $P(A) + 1 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$.

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + P(B) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln 1 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + P(B) = 0 \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

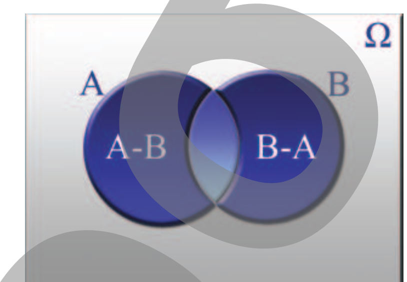
Δ3. Είναι

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$
$$\frac{5}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$
$$P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}$$
$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$



Είναι $(A\cap B)'$: «Το ενδεχόμενο να μη συμβαίνουν ταυτόχρονα τα A, B».
Άρα $P\left((A\cap B)'\right)=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

Δ4. $(A-B)\cup(B-A)$: «Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθεί μόνο το ένα από τα A, B».



Αφού τα $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα από απλό προσθετικό νόμο θα έχουμε:

$$\begin{aligned}P\left(A-B)\cup(B-A)\right)&=P(A-B)+P(B-A)\\&=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$