

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 275

Α2. α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ

$$Α3. \quad \alpha. \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\beta. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\gamma. (e^x)' = e^x$$

$$\delta. (\sin x)' = -\eta\mu x$$

Θέμα Β

Β1. Ο πίνακας γίνεται:

x_i	ν_i	$f_i\%$	Αθρ. συχν.	Αθρ. συχν. %	$x_i\nu_i$
0	8	16	8	16	0
1	10	20	18	36	10
2	15	30	33	66	30
3	10	20	43	86	30
4	5	10	48	96	20
5	2	4	50	100	10
Αθροίσματα	50	100	-	-	100

$$Β.2 \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i \nu_i}{\nu} = \frac{100}{50} = 2.$$

$$Β.3 \quad \delta = \frac{25^\eta + 26^\eta}{2} = \frac{2+2}{2} = 2.$$

Θέμα Γ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & , \text{ αν } x < 1 \text{ και } x \neq -1 \\ \sqrt{x+3} + \alpha & , \text{ αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Γ1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{1-3}{1+1} = -1 \end{aligned}$$

Γ2.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x+3} + \alpha) = \sqrt{4} + \alpha = 2 + \alpha$$

Φροντιστήριο Ορόσημο

Γ3. Για να είναι συνεχής στο 1 θα πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$. Άρα

$$\alpha + 2 = -1 \Leftrightarrow \alpha = -3$$

Γ4.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & , \text{ αν } x < 1 \text{ και } x \neq -1 \\ \sqrt{x+3} - 3 & , \text{ αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Είναι

$$f(0) = \frac{0^2 - 4 \cdot 0 + 3}{0^2 - 1} = -3$$

$$f(6) = \sqrt{6+3} - 3 = 0$$

$$\text{Άρα } A = 3 \cdot f(0) + 2 \cdot f(6) = 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 = -9.$$

Θέμα Δ

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \alpha x + \beta, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$, άρα

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{5}{2} \cdot 0^2 + \alpha \cdot 0 + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 2 άρα από Θ. Fermat $f'(2) = 0$.

$$\text{Όμως } f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{5}{2}x + \alpha.$$

$$\text{Άρα } f'(x) = x^2 - 5x + \alpha.$$

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 2^2 - 5 \cdot 2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -6 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 6$$

Δ2. Είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$. Άρα $f'(x) = x^2 - 5x + 6, \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x = 2 \\ \text{ή} \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$		↗	↘	↗	

Δ3. Για $x = 2$ έχουμε τοπικό μέγιστο το

$$f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 1$$

$$f(2) = \frac{8}{3} - 10 + 13 = \frac{17}{3}$$

Για $x = 3$ έχουμε τοπικό ελάχιστο το

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + 1$$

$$f(3) = 9 - \frac{45}{2} + 19 = \frac{11}{2}$$

Δ4.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1 \right) dx &= \frac{1}{3} \int_1^2 x^3 dx - \frac{5}{2} \int_1^2 x^2 dx + 6 \int_1^2 x dx + \int_1^2 1 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 - \frac{5}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 + 6 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 + [x]_1^2 \\ &= \left(\frac{2^4}{12} - \frac{1}{12} \right) - \left(5 \cdot \frac{8}{6} - \frac{5}{6} \right) + (3 \cdot 4 - 3 \cdot 1) + (2 - 1) \\ &= \frac{15}{12} - \frac{35}{6} + 9 + 1 \\ &= \frac{65}{12} \end{aligned}$$