Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ΄ Λυκείου

Θέμα 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο σελ. 150

Β. Σχολικό βιβλίο σελ. 65

Γ. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

Θέμα 2ο

α. Είναι

$$\overline{x} = \frac{12 + 3\nu_2 + 15 + 32}{13 + \nu_2} \Leftrightarrow 4 = \frac{59 + 3\nu_2}{13 + \nu_2} \Leftrightarrow (13 + \nu_2) \cdot 4 = 59 + 3\nu_2$$

$$\Leftrightarrow 52 + 4\nu_2 = 59 + 3\nu_2 \Leftrightarrow \nu_2 = 7$$

β.

$$s^2 = \frac{(2-4)^2 \cdot 6 + (3-4)^2 \cdot 7 + (5-4)^2 \cdot 3 + (8-4)^2 \cdot 4}{20}$$

$$\Leftrightarrow s^2 = \frac{24 + 7 + 3 + 64}{20} \Leftrightarrow s^2 = 4,9$$

γ.

$$CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{4,9}}{4} \approx \frac{2,2}{4} = 0,55 = 55\% > 10\%$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Θέμα 3ο

α.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση:

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot (6x - 12) + (3x^2 - 12x + \alpha) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 12x - 24 + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 9$$

β.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-6}{2} = -3$$

ορόσημο

γ. Έστω $\big(x_0,\ f(x_0)\big)$ σημείο επαφής. Τότε είναι:

$$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

Το σημείο επαφής επομένως είναι το $A\big(2,\ f(2)\big)$.
Αφού όμως $f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2 - 7 = -5$ είναι Α(2,-5). Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι της μορφής $y = -3x + \beta$. Όμως το A είναι σημείο της εφαπτομένης οπότε:

$$-5 = -3\cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = -3x + 1$.

Θέμα 4ο

Α. α.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x},\ x > 0$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2x} \geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$

x	$-\infty$ $\quad$ 0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↗	↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα όταν το $x \in (0,\ 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,\ +\infty)$.

β. Για $x = 2$ έχω μέγιστο το $f(2) = \ln 2 - 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1$.

Β. α. Επειδή οι τιμές $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8 \in [2, +\infty)$ στο οποίο η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και

$$2 < 3 < 4 < 5 < 8 \text{ έχουμε } f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$$

Δηλαδή

$$f(8) < f(5) < f(4) < f(3) < f(2)$$

Άρα

$$R = f(2) - f(8) = (\ln 2 - 1 + \lambda^2 - 6\lambda + 2) - (\ln 8 - 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2) =$$

$$= \ln 2 - 1 - \ln 8 + 4 = \ln\frac{2}{8} + 3 = \ln\frac{1}{4} + 3$$

Επειδή $\nu = 5$ περιττός αριθμός, άρα η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, οπότε

$$\delta = f(4) = \ln 4 - 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

β.

$$R + \delta < -2 \Leftrightarrow 3 + \ln\frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \Leftrightarrow 3 + \ln 1 - \ln 4 + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0$$

Ορόσημο

λ		1		5	
$\lambda^2-6\lambda+5$	+		-		+

Άρα $\lambda \in (1,\ 5)$, όμως $\lambda \in \Omega$, οπότε $A = \{2,\ 3,\ 4\}$. Επομένως, αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100} = 3\%$$

Ορόσημο