

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Θέμα 1 A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 235

A2. Σχολικό βιβλίο σελ. 191

Γ. Σωστό Σωστό Λάθος Λάθος Σωστό

Θέμα 2 α. Είναι $|(i + 2\sqrt{2})| = 6 \Leftrightarrow |i + 2\sqrt{2}| \cdot |z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{1+8}|z| = 6 \Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$.

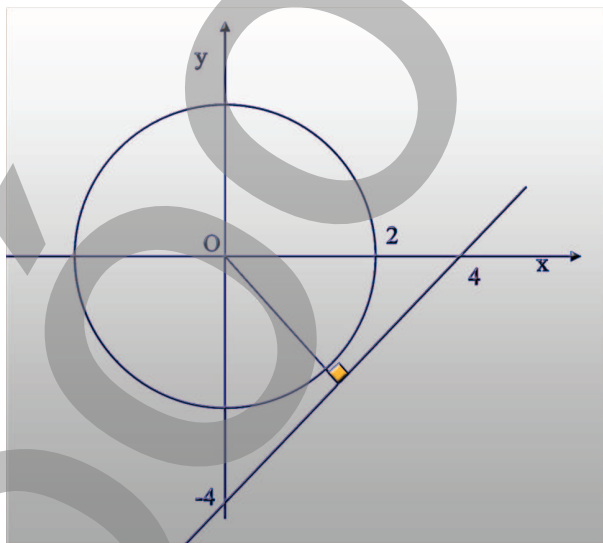
Επομένως είναι κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και $\rho = 2$.

β. Έχουμε

$$\begin{aligned} |w - (1 - i)| &= |w - (3 - 3i)| \stackrel{w=x+yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - 1 + i| = |x + yi - 3 + 3i| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i| = |(x-3)+(y+3)i| \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x - 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \varepsilon : x - y - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\gamma. \min|w| = d(O, \varepsilon) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

δ. Είναι $d(O, \varepsilon) = 2\sqrt{2} > 2$



$$\text{Άρα } \min|z - w| = d(O, \rho) - \rho = 2\sqrt{2} - 2.$$

Θέμα 3 α. Αρκεί να δείχθει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{(-\infty)}{(+\infty)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 = f(0) \end{aligned}$$

β. Για $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη: $f'(x) = \ln x + 1$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$$

x	0	1/e	+∞
f'(x)	■	○	+
f(x)	■	↘	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ επειδή η f συνεχής στο 0.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Αν $\Delta_1 = \left[0, \frac{1}{e}\right]$ τότε το $f(\Delta_1) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ επειδή f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 και $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$.

Αν $\Delta_2 = \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ είναι $f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ επειδή f γνησίως αύξουσα στο Δ_2 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$$\text{Τελικά } f([0, +\infty)) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

γ. Είναι

$$x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow \alpha = x \ln x \Leftrightarrow f(x) = \alpha, \quad x > 0 \quad (1)$$

- Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$ τότε $\alpha \notin f(\Delta_1)$ και $\alpha \notin f(\Delta_2)$, άρα η (1) δεν έχει καμία ρίζα.
- Αν $-\frac{1}{e} < \alpha \leq 0$ τότε $\alpha \in f(\Delta_1)$ και $\alpha \in f(\Delta_2)$, τότε επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 η (1) έχει δύο ακριβώς ρίζες.
- Αν $\alpha > 0$ τότε $\alpha \in f(\Delta_2)$ και επειδή f γνησίως μονότονη στο Δ_2 η (1) έχει μία ακριβώς ρίζα.
- Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$ τότε $\alpha \in f(\Delta_1)$ και επειδή f γνησίως μονότονη στο Δ_1 η (1) έχει μία ακριβώς ρίζα.

δ. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[x, x+1]$.

Η f παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$

Η f συνεχής στο $[x, x+1]$ Άρα υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x)$.

Είναι f' παραγωγίσιμη για $x > 0$, άρα $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ για $x > 0$. Οπότε f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Για $x < \xi < x+1 \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1)$ άρα $f(x+1) - f(x) < f'(x+1), x > 0$

Θέμα 4 α. Θέτουμε $\int_0^2 f(t)dt = c$. Από υπόθεση $f(x) = (10x^3 + 3x) \cdot c - 45$
Επομένως

$$\int_0^2 f(t)dt = c \Leftrightarrow \int_0^2 [(10t^3 + 3t) \cdot c - 45]dt = c \Leftrightarrow \left[\left(\frac{10t^4}{4} + 3\frac{t^2}{2} \right) \cdot c - 45t \right]_0^2 = c$$

$$\left(10 \cdot \frac{2^4}{4} - 0 + 3 \cdot \frac{4}{2} - 0 \right) \cdot c - 45 \cdot 2 + 45 \cdot 0 = c \Leftrightarrow 46c - 90 = c \Leftrightarrow 45c = 90 \Leftrightarrow c = 2$$

β. Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{g'(x) - g'(x+(-h))}{-h} = \lim_{-h \rightarrow 0} \frac{g'(x+(-h)) - g'(x)}{-h} \stackrel{-h=\kappa}{=} \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{g'(x+\kappa) - g'(x)}{\kappa} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} = g''(x) \end{aligned}$$

γ. i. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{h} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x) - g'(x-h) + g'(x)}{h} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (g''(x) + g''(x)) = g''(x) \end{aligned}$$

Άρα $g''(x) = f(x) + 45$. Οπότε $g''(x) = 20x^3 + 6x - 45 + 45 \Leftrightarrow g''(x) = 20x^3 + 6x$.

$$g'(x) = 20\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^2}{2} + c_1$$

Έχουμε $g'(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$

$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$ άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$, όμως $g(0) = 1$, άρα $c_2 = 1$.

Τελικά $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

ii. g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολωνυμική. $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε g "1-1".