Μαθηματικά Γ' ΤΕΕ 2008

Θέμα 1 α. Είναι $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu} = \dfrac{8+14+20+12+16}{5} = \dfrac{70}{5} = 14.$

β.

$$8,\ 12,\ 14,\ 16,\ 20$$

$\nu = 5$ περιττός, άρα $\delta = 3^\eta$ παρατήρηση $= 14$

γ. $s = \sqrt{s^2}$, όπου

$$s^2 = \frac{\nu_1(\overline{x}-x_1)^2 + \nu_2(\overline{x}-x_2)^2 + \ldots + \nu_5(\overline{x}-x_5)^2}{5} =$$
$$= \frac{36+4+0+4+36}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

δ. $R =$ Μέγιστη παρατήρηση $-$ Ελάχιστη παρατήρηση $= 20 - 8 = 12$

ε. $CV = \dfrac{s}{\overline{x}} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7} = 0,2857 = 28,57\% > 10\%$, άρα δεν είναι ομοιογενές.

Θέμα 2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\lambda(x-1)} & ,\ 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{3x-1} & ,\ x \ge 1 \end{cases},\ \lambda \ne 0$$

α.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{\lambda(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\lambda(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\lambda(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\lambda(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\lambda(\sqrt{1}+1)} = \frac{1}{2\lambda}$$

β. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{3x-1} = \dfrac{1}{3\cdot 1 - 1} = \dfrac{1}{2}.$

γ. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

δηλαδή $\dfrac{1}{2\lambda} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = 1.$

Θέμα 3 Είναι $f(x) = e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}.$

α.

$$f'(x) = e^{\lambda x} \cdot (\lambda x)' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$$
$$f''(x) = (\lambda \cdot e^{\lambda x})' = \lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot (\lambda x)' = \lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot \lambda = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$$

β. Είναι

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\text{Άρα } e^{\lambda x} = 0 \text{ (Αδύνατη) ή } \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\lambda_{1,1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

γ. i. Για $\lambda = 2$ είναι $f'(x) = e^{2x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Για $\lambda = -1$ είναι $f'(x) = -1 \cdot e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 4

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008,\ x \in \mathbb{R}$$

α. Είναι $f'(x) = \left(\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008\right)' = x^2 - 4x + 3,\ x \in \mathbb{R}$.

β. Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

x	-∞	1		3	+∞
f′(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗		↘		↗

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1,\ 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,\ +\infty)$.

Επομένως η f παρουσιάζει στο 1 τοπικό μέγιστο το $f(1) = \dfrac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2008 = \dfrac{6028}{3}$ και στο 3 τοπικό ελάχιστο το $f(3) = \dfrac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 2008 = 9 - 18 + 9 + 2008$.

γ. Αφού η f παρουσιάζει για $x \geq 1$ τοπικό ελάχιστο στο 3, θα ισχύει ότι $f(x) \geq f(3)$, δηλαδή $f(x) \geq 2008$.