

Θέμα 1^ο

A1 σελ.98

A2 σελ.141

A3 σελ.280

B

α. Λ

β. Λ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Σ

Θέμα 2^ο

α)

$$z = \frac{2+ai}{a+2i}$$

$$|z| = \frac{|2+ai|}{|a+2i|} = \frac{|2+ai|}{|a+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+a^2}}{\sqrt{a^2+2^2}} = 1$$

β)

i)

$$z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i \quad \text{έχει εικόνα } A(0, -1)$$

$$z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1 \quad \text{έχει εικόνα } A(1, 0)$$

$$(AB) = \sqrt{(1-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\eta \quad (AB) = |z_2 - z_1| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

ii)

$$(z_1)^{2v} = (-i)^{2v} = i^{2v} = (i^2)^v = (-1)^v = (-z_2)^v$$

Θέμα 3^ο

α)

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta, \quad D_f = \mathbb{R}$$

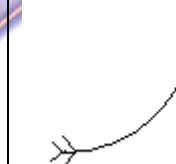
$f(x)$: Δύο φορές παραγωγίσιμη

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	+	+	
$f'(x)$	+	-	-	+	
$f(x)$					

β)

Βρίσκουμε το Σ.Τ.

$$f(-\infty, -1] \xrightarrow{f \uparrow} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right) = (-\infty, 2 - 2\eta\mu^2\theta) = (-\infty, 2(1 - \eta\mu^2\theta)) = (-\infty, 2\sigma\nu\eta^2\theta) \ni 0,$$

$$f(-1, 1] \xrightarrow{f \downarrow} \left[f(+1), f(-1) \right] = [-2 - 2\eta\mu^2\theta, 2 - 2\eta\mu^2\theta] = [-2(1 + \eta\mu^2\theta), 2\sigma\nu\eta^2\theta] \ni 0$$

$$f(1, +\infty) \xrightarrow{f \uparrow} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2 - 2\eta\mu^2\theta, +\infty) = [-2(1 + \eta\mu^2\theta), +\infty) \ni 0,$$

άρα f έχει τρείς ακριβώς λύσεις διότι είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα παραπάνω διαστήματα.

γ)

Έχουμε:

$$A(-1, f(-1) = 2\sigma\nu\eta^2\theta)$$

$$B(1, f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta))$$

$$\Gamma(0, f(0) = -2\eta\mu^2\theta)$$

Η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$

Για το σημείο A έχουμε:

$$2\sigma\nu\eta^2\theta = (-2)(-1) - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\nu\eta^2\theta$$

ισχύει, άρα το σημείο A ανήκει στην ευθεία

Για το σημείο B έχουμε:

$$-2(1 + \eta\mu^2\theta) = (-2)1 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta) \text{ ισχύει, άρα το σημείο B ανήκει στην ευθεία}$$

Για το σημείο Γ έχουμε:

$$-2\eta\mu^2\theta = (-2)0 - 2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta \text{ ισχύει, άρα το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία}$$

δ)

Βρισκουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - y = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta + 2x + 2\eta\mu^2\theta = x^3 - x$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x^3 - x$		-	+	-	+

$$\text{Άρα: } E = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα 4^ο

f συνεχής και αύξουσα στο $[0, 1]$

g συνεχής και αύξουσα στο $[0, 1]$

$f(0) > 0$

$g(x) > 0, x \in [0, 1]$

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t) dt \quad x \in [0, 1]$$

$$G(x) = \int_0^x g(x) dt \quad x \in [0, 1]$$

α)

$$0 < x \leq 1 \Leftrightarrow f(0) < f(x) \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ για } x \in (0, 1]$$

$$F'(x) = f(x)g(x) > 0 \text{ για } x \in (0, 1)$$

άρα $F \uparrow$ στο $[0, 1]$, οπότε $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow F(x) < F(0) \Leftrightarrow F(x) > 0$

β)

Θέλουμε να δείξουμε ότι :

$$f(x)G(x) > F(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \int_0^x g(t) dt > \int_0^x f(t) g(t) dt \Leftrightarrow f(x) \int_0^x g(t) dt - \int_0^x f(t) g(t) dt > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(x) g(t) dt - \int_0^x f(t) g(t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x g(t) (f(x) - f(t)) dt > 0$$

Έχουμε ότι $0 \leq t \leq x$ και επειδή η $f \uparrow$ στο $[0,1]$ θα ισχύει $f(t) \leq f(x)$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(t) \geq 0 \text{ και } g(t) > 0.$$

Άρα $g(t)(f(x) - f(t)) \geq 0$, όμως η $g(t)(f(x) - f(t))$ δεν μηδενίζεται παντού

$$\text{Άρα } \int_0^x g(t)(f(x) - f(t)) dt > 0.$$

γ)

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}, \quad \text{Θεωρώ συνάρτηση } h(x) = \frac{F(x)}{G(x)}, \quad x \in (0,1]$$

$$h'(x) = \left(\frac{F(x)}{G(x)} \right)' = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)} = \frac{f(x)g(x)G(x) - F(x)g(x)}{G^2(x)} = \frac{g(x)(f(x)G(x) - F(x))}{G^2(x)}$$

$$\text{Από 4β } f(x)G(x) - F(x) > 0, \quad x \in (0,1]$$

$$\text{και } g(x) > 0$$

$$\text{και } G^2(x) > 0$$

$$\text{Άρα } h'(x) > 0 \text{ οπότε } h(x) \uparrow \text{ στο } (0,1]$$

$$\text{Επειδή } 0 < x \leq 1 \text{ έχουμε } h(x) \leq h(1) \text{ οπότε: } \frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

δ)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t) g(t) dt \right) \left(\int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt \right)}{\left(\int_0^x g(t) dt \right) x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) \int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt}{G(x) x^5}$$

$$\left| \frac{F(x) \int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt}{G(x) x^5} \right| \leq \left| \frac{F(1) \int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt}{G(1) x^5} \right| \quad \text{άρα:} \quad - \left| \frac{F(1) \int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt}{G(1) x^5} \right| \leq \frac{F(x) \int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt}{G(x) x^5} \leq \left| \frac{F(1) \int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt}{G(1) x^5} \right|$$

$$\left. \begin{aligned} -\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(1)}{G(1)} \cdot \frac{2x \cdot \eta \mu x^4}{5x^4} \right) &= -\frac{F(1)}{G(1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x \cdot \eta \mu x^4}{5x^4} \right) = -\frac{F(1)}{G(1)} \cdot 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(1)}{G(1)} \cdot \frac{2x \cdot \eta \mu x^4}{5x^4} \right) &= \frac{F(1)}{G(1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x \cdot \eta \mu x^4}{5x^4} \right) = \frac{F(1)}{G(1)} \cdot 0 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x^4}{x^4} = 1$

Από κριτήριο παρεμβολής έχω $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{F(x) \int_0^{x^2} \eta \mu^2 t dt}{G(x) x^5} \right) = 0$

