Απαντήσεις Μαθηματικών Γ′ ΤΕΕ έτους 2007

Θέμα 1:

α.

Διάστημα	ν_i	K_i	$K_i\nu_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
[2, 4)	3	3	9	12	12
[4, 6)	6	5	30	24	36
[6, 8)	8	7	56	32	68
[8, 10)	5	9	45	20	88
[10, 12)	3	11	33	12	100
Αθροίσματα	25	-	173	100	-

β. Είναι $\overline{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{5} K_i\nu_i = \frac{173}{25} = 6,92$.
γ. Τουλάχιστον 6 λεπτά καθυστέρηση είχαν $\nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 8 + 5 + 3 = 16$.
δ. Το ποσοστό των δρομολογίων που είχαν καθυστέρηση λιγότερο από 8 λεπτά είναι $F_3\% = 68$.
Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι 68%.

Θέμα 2:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} & , \text{αν } x < 0 \\ -3 + \beta & , \text{αν } x = 0 \\ e^x - \alpha & , \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

α. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x(x^2 - 4x + 3)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \frac{3}{-1} = -3.$
β. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (e^x - \alpha) = e^0 - \alpha = 1 - \alpha.$
γ. Για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ πρέπει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow -3 = 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha = 4$$

δ. Για $\alpha = 4$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} & , \text{αν } x < 0 \\ -3 + \beta & , \text{αν } x = 0 \\ e^x - 4 & , \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Για να είναι η f συνεχής στο 0 πρέπει:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -3 = f(0) \Leftrightarrow -3 + \beta = -3 \Leftrightarrow \beta = 0$$

Θέμα 3:

$$f(x) = x^2 + \kappa x + \lambda$$

α. Αφού η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ ισχύει ότι $f'(1) = 0$. (Θ. Fermat) και αφού το $A(1,\ 0)$ ανήκει στη C_f ισχύει ότι $f(1) = 0$.
$f(x) = (x^2 + \kappa x + \lambda)' = 2x + \kappa$.

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 1 + \kappa = 0 \Leftrightarrow 2 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = -2$$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + \kappa\cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 1 + \kappa + \lambda = 0 \Leftrightarrow 1 + (-2) + \lambda = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

β. Είναι $f'(x) = 2x + \kappa = 2x + (-2) = 2x - 2$.
$f''(x) = (2x - 2)' = 2$.
γ. Είναι $f(x) = x^2 + (-2)x + 1 = x^2 - 2x + 1$.

Άρα $f(x)+f'(x)+f''(x)=x^2-2x+1+2x-2+2=x^2+1>0$.

Θέμα 4:

$$f(x)=10\ln x-5x^2,\ x>0$$

α. $f'(x)=(10\ln x-5x^2)'=10\dfrac{1}{x}-10x$.

β.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 10\frac{1}{x}-10x=0\Leftrightarrow \frac{10-10x^2}{x}=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} 10-10x^2=0\Leftrightarrow 10(1-x^2)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$$

Όμως $x>0$, οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$ **0**		**1**	$+\infty$
$f'(x)$		+	**0**	-
$f(x)$		↗		↘

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,\ 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,\ +\infty)$.

γ. Επομένως η f παρουσιάζει στο $x_0=1$ τοπικό μέγιστο το $f(1)=10\ln 1-5\cdot 1^2=10\cdot 0-5=-5$.

δ. Αφού η f παρουσιάζει μέγιστο το $f(1)=-5$ ισχύει ότι $f(x)\le f(1)$ για κάθε $x>0$.

Άρα $f(x)\le -5$, για κάθε $x>0$.