Θέμα 1:

Α. Σχολικό βιβλίο σελ. 30

Β. α) Σχολικό βιβλίο σελ. 142

β) Σχολικό βιβλίο σελ. 16

Γ. α. Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

Θέμα 2:

α. $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=\nu \Leftrightarrow \alpha+4+5\alpha+8+4\alpha+\alpha-1=2\alpha=50 \Leftrightarrow 13\alpha+11=50 \Leftrightarrow 13\alpha=39 \Leftrightarrow \alpha=3$.

β.

Αριθμός βιβλίων x_i	Αριθμός μαθητών ν_i	$x_i\nu_i$	N_i
0	7	0	7
1	23	23	30
2	12	24	42
3	2	6	44
4	6	24	50
Σύνολο	$\nu=50$	77	

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i\nu_i}{\nu}=\frac{77}{50}=1,54 \text{ βιβλία}$$

γ. $\delta=\frac{x_{25}+x_{26}}{2}=\frac{1+1}{2}=1$ βιβλίο.

δ. Α: Το ενδεχόμενο ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.
$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\nu_4+\nu_5}{\nu}=\frac{2+6}{50}=\frac{4}{25}=0,16$ ή16%

Θέμα 3:

α. Α: Το ενδεχόμενο να επιλεγεί αγόρι. $N(A)=x$.
$N(\Omega)=x+(x+4)^2$.

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{x}{x+(x+4)^2}$$

β. $P(A)=\frac{1}{19}\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+9x+16}=\frac{1}{19}\Leftrightarrow x^2-10x+16=0$ Άρα προκύπτει $x_1=8$ ή $x_2=2$.

- Αν $x=8$ αγόρια τότε $N(\Omega)=x^2+(x+4)^2=8+12^2=152>100$ άτοπο, άρα ο χορευτικός όμιλος έχει 2 αγόρια, 36 κορίτσια και συνολικά 38 μέλη.

A' : Το ενδεχόμενο να επιλεγεί κορίτσι. $P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{19}=\frac{18}{19}$.

γ. Έστω $f(x)=\dfrac{x}{x^2+9x+16}$, άρα $f'(x)=\dfrac{-x^2+16}{(x^2+9x+16)^2}$. Πρέπει $0\leq P(A)\leq 1$, δηλαδή

$$0\leq \frac{x}{x+(x+4)^2}\leq 1$$

, που ισχύει για $x\geq 0$, λαμβάνοντας υπόψη ότι το x εκφράζει πλήθος αγοριών.
$f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+16}{(x^2+9x+16)^2}>0 \Leftrightarrow -x^2+16>0$ αφού $(x^2+9x+16)^2>0$
Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		4	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

Για να μεγιστοποιηθεί λοιπόν η πιθανότητα πρέπει να συμμετέχουν 4 αγόρια και η μέγιστη τιμή της πιθανότητας είναι $f(4)=\dfrac{1}{17}$.

Θέμα 4:

α. $f'(x)=-4x+\kappa+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Για να είναι η εφαπτομένη της f παράλληλη στο $x'x$ στο Α πρέπει $f'(1)=0\Leftrightarrow -4+\kappa+2=0\Leftrightarrow \kappa=2$. Οπότε $f(x)=-2x^2+2x+4\sqrt{x}+10$, $f(1)=14$.
Έστω η εφαπτομένη στο Α(1, $f(1)$=14) να είναι η $y=\lambda x+\beta$

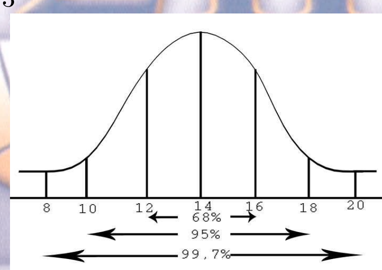
$$\lambda=f'(1)=0 \text{ άρα } y=\beta$$

Αφού διέρχεται από το Α έχουμε η εξίσωση της εφαπτομένης να είναι $y=14$.

β. *i.* $\overline{x}=f(1)=14$.

$$f'(x)=-4x+2+\frac{2}{\sqrt{x}},\ \text{οπότε}\ f'(4)=-6+2+1=-13$$

Επομένως $s=\dfrac{-2f'(4)}{13}=-\dfrac{2(-13)}{13}=2$.



Επειδή η κατανομή είναι κανονική και οι τρεις παρατηρήσεις είναι μικρότερες ή ίσες του 8 έχουμε $\dfrac{100-99,7}{100}=0,15\%$ το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες του 8. Άρα $\dfrac{0,15}{100}\nu=3\Leftrightarrow 0,15\nu=300\Leftrightarrow \nu=\dfrac{300}{0,15}\Leftrightarrow \nu=2000$. Στο διάστημα (10, 16) βρίσκονται $68+\dfrac{95-68}{2}=68+13,5=81,5\%$. Άρα $\dfrac{81,5}{100}2000=1630$ παρατηρήσεις.

ii. $CV=\dfrac{s}{\overline{x}}=\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}>\dfrac{1}{10}=0,1$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
Αν προσθέσουμε $\alpha>0$ σε όλες τις παρατηρήσεις τότε η νέα μέση τιμή $\overline{x'}$ θα είναι $\overline{x'}=\overline{x}+\alpha\Leftrightarrow \overline{x'}=14+\alpha$, ενώ η νέα τυπική απόκλιση s' δεν αλλάζει, άρα $s'=2$.

$$CV'=\frac{s'}{\overline{x'}}=\frac{2}{14+\alpha}$$

Για να είναι ομοιογενές θα πρέπει $CV' \leq 0,1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{14+\alpha} \leq 0,1 \Leftrightarrow 2 \leq 1,4 + 0,1\alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 6$.
Άρα $\alpha = 6$.