

ΘΕΜΑ 1ο :

- A. 1. Απάντηση: Σχολικό βιβλίο σελ. 253
 2. Απάντηση: Σχολικό βιβλίο σελ. 273
- B. α. Λ
 β. Σ
 γ. Σ
 δ. Λ
 ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο :

α. $f'(x) = 2(x-2) > 0$ για $x > 2$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ οπότε θα είναι και "1-1".

β. Επειδή η f είναι "1-1" ορίζεται η f^{-1} :

$f(x) = y \Leftrightarrow 2 + (x-2)^2 = y \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{y-2}, y \geq 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y-2} + 2, y \geq 2$ άρα $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 2, x \geq 2$

γ. i. Η C_f και η $C_{f^{-1}}$ συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, άρα τα κοινά σημεία της C_f με την $y=x$ είναι και σημεία της $C_{f^{-1}}$:

$f(x) = y \Leftrightarrow 2 + (x-2)^2 = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 2 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = 2$ άρα τα σημεία A(2,2) και B(3,3) είναι τα κοινά σημεία της C_f και της $C_{f^{-1}}$ με την $y=x$.

ii. Είναι: $f^{-1}(x) \geq x \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x-2} \geq x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 3]$. Άρα η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω από την $y=x$ στο $[2, 3]$. Η C_f και η $C_{f^{-1}}$ συμμετρικές ως προς την $y=x$, άρα η C_f

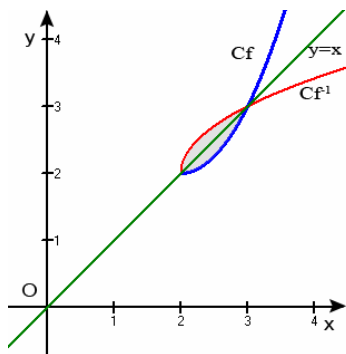
βρίσκεται κάτω από την $y=x$ στο $[2, 3]$. Άρα:

$$E = \int_2^3 [2 + \sqrt{x-2} - 2 - (x-2)^2] dx = \int_2^3 [\sqrt{x-2} - (x-2)^2] dx$$

Θέτουμε: $u = x-2$, οπότε $du = dx$. Για $x = 2$ έχουμε $u_1 = 0$ και για $x = 3$ έχουμε $u_2 = 1$, άρα:

$$E = \int_0^1 (\sqrt{u} - u^2) du = \int_0^1 (u^{\frac{1}{2}} - u^2) du = \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \left[2\sqrt{u^3} - u^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} [2 - 1]_0^1 = \frac{1}{3} \tau.μ.$$



ΘΕΜΑ 3ο :

α. i. Είναι: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -z_1 - z_3$

Επομένως έχουμε:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 - (-z_1 - z_3)| = |-z_1 - z_3 - z_3| \Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |-z_1 - 2z_3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2z_1 + z_3|^2 = |-z_1 - 2z_3|^2 \Leftrightarrow (2z_1 + z_3)(2\bar{z}_1 + \bar{z}_3) = (-z_1 - 2z_3)(-\bar{z}_1 - 2\bar{z}_3) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3|z_1|^2 = 3|z_3|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_3|$$

που ισχύει από υπόθεση.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3|$

ii. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 2$ (1)

$|z_1 - z_3| \leq |z_1| + |z_3| = 2$ (2)

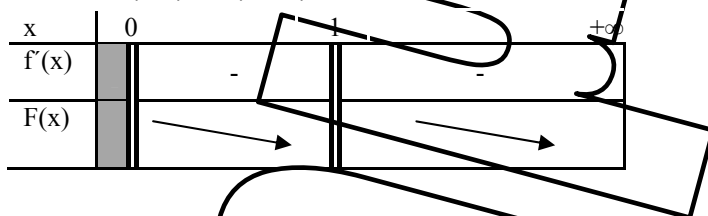
πολλυτας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε: $|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3| \leq 4$ όμως από i) έχουμε

$|z_1 - z_3| = |z_1 - z_2|$ ΟΠΩΣΤΕ $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$.
 $|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \Rightarrow (z_1 - z_2) \cdot \overline{(z_1 - z_2)} \leq 4 \Rightarrow \dots \Rightarrow$
 $\Rightarrow -(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) + 2 \leq 4 \Rightarrow \dots \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) \geq -1$
 β. Αφού $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο και επειδή
 $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$ αυτές είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

ΘΕΜΑ 4ο :

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο. της με $f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{x(x-1)^2}$, άρα $f'(x) = 0$ για $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και $(1, \infty)$.



$f((0,1)) = (\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) = (-\infty, +\infty)$

$f((1,+\infty)) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (-\infty, +\infty)$, άρα σύνολο τιμών της f το \mathbb{R} .

β) Αφού $f((0,1)) = (-\infty, +\infty)$ θα υπάρχει μοναδικό $\chi_1 \in (0,1)$ ώστε $f(\chi_1) = 0$ αφού η f \downarrow στο $(0,1)$. Ακόμη αφού $f((1,+\infty)) = (-\infty, +\infty)$ θα υπάρχει μοναδικό $\chi_2 \in (1,+\infty)$ ώστε $f(\chi_2) = 0$ αφού η f \downarrow στο $(1,+\infty)$. Άρα η f έχει ακριβώς 2 ρίζες στο Π.Ο. της.

γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{x}$. Η εφαπτομένη ϵ_1 της C_g στο $A(\alpha, \ln \alpha)$, $\alpha > 0$ έχει εξίσωση

$y = \frac{1}{\alpha}x + \ln \alpha - 1$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $h'(x) = e^x$ η εφαπτομένη ϵ_2 της C_h στο $B(\beta, e^\beta)$ έχει

εξίσωση: $y = e^\beta x + (1-\beta)e^\beta$. Οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 ταυτίζονται οπότε $\frac{1}{\alpha}x + \ln \alpha - 1 = e^\beta x + (1-\beta)e^\beta$ οπότε

$$\left. \begin{cases} \frac{1}{\alpha} = e^\beta \\ \ln \alpha - 1 = (1-\beta)e^\beta \end{cases} \right\} \Rightarrow \left. \begin{cases} \beta = -\ln \alpha \\ \ln \alpha - 1 = (1 + \ln \alpha) \frac{1}{\alpha} \end{cases} \right\} \Rightarrow \left. \begin{cases} \beta = -\ln \alpha \\ (a-1) \ln a = a + 1(1) \end{cases} \right\}$$

Είναι $\alpha \neq 1$ γιατί αν $\alpha = 1$ τότε από (1) $0 = 2$ άτοπο, οπότε $\ln \alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$ άρα α είναι ρίζα της $f(x) = 0$

γ) Από (γ) ερώτημα αν η C_g και η C_h δέχονται κοινή εφαπτομένη, τότε ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και η εξίσωση αυτή έχει δυο ακριβώς ρίζες από (β) επομένως η C_g και η C_h έχουν δυο ακριβώς κοινές εφαπτομένες.